

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт  
вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук



На правах рукописи

Пережогин Павел Александрович

**Стохастические и детерминистические подсеточные  
параметризации для двумерной турбулентности и их  
применение в моделях циркуляции океана**

Специальность 05.13.18 —

«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
Глазунов Андрей Васильевич

Москва — 2021

## Оглавление

	Стр.
Введение . . . . .	5
<b>Глава 1. Исследование когерентных структур в идеальной (невязкой) жидкости и в форсированной турбулентности . . . . .</b>	<b>23</b>
1.1 Разностные схемы и методы решения . . . . .	27
1.2 Результаты численных экспериментов со схемами, аппроксимирующими уравнения идеальной жидкости . . . . .	28
1.3 Крупномасштабная структура и распределение завихренности по площадям в двумерных уравнениях с диссипацией и форсингом	34
1.4 Выводы . . . . .	38
<b>Глава 2. Исследование влияния численных схем адвекции на воспроизведение обратного каскада энергии . . . . .</b>	<b>40</b>
2.1 Уравнения и параметры модели . . . . .	41
2.2 Численные методы . . . . .	42
2.2.1 Конечно-разностные схемы в переменных $(\mathbf{u}, p)$ . . . . .	42
2.2.2 Конечно-разностные схемы в переменных $(\psi, \omega)$ . . . . .	43
2.2.3 Полулагранжевы методы в переменных $(\psi, \omega)$ . . . . .	44
2.2.4 Полулагранжевы методы в переменных $(\mathbf{u}, p)$ . . . . .	45
2.3 Численные эксперименты . . . . .	46
2.3.1 Крупномасштабный форсинг . . . . .	47
2.3.2 Мелкомасштабный форсинг . . . . .	48
2.4 Выводы . . . . .	52
<b>Глава 3. Исследование влияния подсеточных параметризаций на воспроизведение обратного каскада энергии . . . . .</b>	<b>53</b>
3.1 Априорный анализ подсеточных сил . . . . .	56
3.1.1 Спектральные характеристики подсеточных сил . . . . .	57
3.1.2 Воспроизведение ОПКЭ с помощью модели подобия масштабов . . . . .	59

	Стр.	
3.2	Подсеточные параметризации . . . . .	60
3.2.1	Стохастическая параметризация . . . . .	61
3.2.2	Параметризация отрицательной вязкости . . . . .	63
3.2.3	Модель подобия масштабов . . . . .	63
3.2.4	Комбинированная параметризация: стохастика + модель подобия масштабов . . . . .	64
3.3	Численные эксперименты . . . . .	64
3.4	Выводы . . . . .	70
 <b>Глава 4. Исследование влияния подсеточных параметризаций на воспроизведение баротропной неустойчивости . . . . .</b>		 <b>72</b>
4.1	Уравнения и параметры модели . . . . .	73
4.1.1	Модель вихревой вязкости и внешнее воздействие . . . . .	74
4.1.2	Параметры экспериментов . . . . .	75
4.2	Статистические характеристики баротропной неустойчивости . . . . .	75
4.2.1	Численное решение проблемы собственных значений . . . . .	76
4.2.2	Определение энергии неустойчивой моды . . . . .	78
4.2.3	Рост неустойчивой моды в присутствии внешнего стохастического воздействия . . . . .	79
4.2.4	Обзор результатов расчетов при различных разрешениях . . . . .	79
4.3	Модели подсеточной двумерной турбулентности . . . . .	82
4.3.1	Модель отрицательной вязкости . . . . .	82
4.3.2	Стохастическая модель . . . . .	82
4.3.3	Модель подобия масштабов . . . . .	83
4.3.4	Сравнительный анализ параметризаций . . . . .	83
4.4	Численные эксперименты . . . . .	84
4.5	Выводы . . . . .	87
 <b>Глава 5. Подсеточные параметризации в модельной конфигурации Double Gyre в модели океана NEMO . . . . .</b>		 <b>88</b>
5.1	Конфигурация Double Gyre . . . . .	89
5.2	Подсеточные параметризации . . . . .	92
5.2.1	Модель отрицательной вязкости . . . . .	92
5.2.2	Стохастическая параметризация . . . . .	94

	Стр.
5.3	Результаты . . . . . 95
5.3.1	Вихревая кинетическая энергия . . . . . 96
5.3.2	Вихревой поток тепла . . . . . 98
5.3.3	Средние поля . . . . . 101
5.3.4	Временная изменчивость . . . . . 103
5.4	Выводы . . . . . 105
<b>Глава 6.</b>	<b>Спектральные характеристики подсеточных сил и</b>
	<b>подсеточных параметризаций в модели океана NEMO . 106</b>
6.1	Спектральные характеристики модели R24 . . . . . 109
6.2	Характеристики подсеточных сил . . . . . 113
6.3	Спектральный анализ подсеточных параметризаций . . . . . 116
6.4	Метод релаксации для определения характеристик подсеточных параметризаций . . . . . 118
6.5	Параметризация отрицательной вязкости при вихреразрешающем разрешении . . . . . 121
6.6	Выбор масштаба стохастической параметризации при вихреразрешающем разрешении . . . . . 121
6.7	Выводы . . . . . 127
<b>Заключение . . . . . 128</b>	
<b>Приложение А. Внешнее стохастическое воздействие . . . . . 130</b>	
<b>Приложение Б. Предварительное тестирование</b>	
	<b>коротковолновой стохастической параметризации 131</b>
<b>Приложение В. Корректность по Адамару (устойчивость к</b>	
	<b>начальным данным) для параметризации</b>
	<b>отрицательной вязкости . . . . . 133</b>
<b>Приложение Г. Стохастическая параметризация с</b>	
	<b>авторегрессионным процессом по времени . . . . 135</b>

## Введение

Диссертационная работа посвящена улучшению воспроизведения динамики океана современными численными моделями с помощью "подсеточных" параметризаций мезомасштабных вихрей. Ниже будут приведены основные свойства океанических течений в мезомасштабном диапазоне, их тесная связь с модельными задачами квазидвумерной турбулентности и обзор подходов к построению LES (Large Eddy Simulation, [9]) параметризаций подсеточной квазидвумерной турбулентности.

Океанические течения характеризуются большим диапазоном масштабов, которые взаимодействуют друг с другом нелинейным образом. На большом интервале пространственных масштабов, от планетарного (тысячи километров) и вплоть до масштаба, равного глубине жидкости (несколько километров), течения можно считать квазидвумерными (т.е. вертикальные скорости малы по сравнению с горизонтальными). Это свойство позволяет формулировать уравнения динамики глобальных моделей океана в приближении гидростатики. Взаимодействие с более мелкими масштабами (несколько десятков метров) в таких моделях осуществляется с помощью RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes, [9]) параметризаций трехмерной турбулентности в пограничных слоях вблизи поверхности жидкости и у дна.

Квазидвумерные течения в океане отличаются по своим свойствам в зависимости от рассматриваемого горизонтального масштаба. На планетарном масштабе преобладает волновая динамика, характеризующаяся быстрыми инерционно-гравитационными волнами, которые отвечают за формирование приливов, а также играют ключевую роль в формировании цунами. Другим проявлением волновой динамики является западная интенсификация течений и формирование круговоротов, вызванные напряжением трения ветра (задачи Стоммела и Манка [10], где ключевую роль играет эффект дифференциального вращения, который порождает волны Россби).

Указанные волновые движения подавляют нелинейные взаимодействия на крупных масштабах следующим образом. Начиная от планетарного масштаба и примерно до 100 км, медленную компоненту динамики, из которой исключены быстрые инерционно-гравитационные волны, можно считать геострофически-сбалансированной, т.е. наблюдается приближительное равенство

между градиентом давления и силой Кориолиса. Для таких течений можно осуществить асимптотическое разложение уравнений динамики по числу Россби ( $Ro = \frac{U}{Lf}$ ;  $U, L$  – характерные скорость и горизонтальный масштаб,  $f$  – параметр Кориолиса), результатом которого являются квазигеострофические уравнения [11]. Нелинейная динамика в этих уравнениях зависит от баротропного радиуса деформации Россби ( $L_0 = \frac{\sqrt{gH}}{f}$ , где  $g$  – ускорение свободного падения,  $H$  – глубина жидкости), который для океана в средних широтах равняется  $L_0 \approx 2000$  км. Если рассматриваемый масштаб течений значительно меньше  $L \ll L_0$ , то однослойные квазигеострофические уравнения эквивалентны уравнениям двумерной несжимаемой жидкости, в противном случае,  $L \gg L_0$ , нелинейные взаимодействия оказываются пренебрежимо малы [10]. Волны Россби также ослабляют нелинейные взаимодействия в крупных масштабах, и с ними связан масштаб Райнса ( $L_{rh} = \sqrt{\frac{U}{\beta}}$ , где  $\beta$  – изменение параметра Кориолиса по широте), на котором происходит формирование струйных течений [12]. Обычно для океана в средних широтах масштаб Райнса составляет 300 км и соответствует максимуму спектральной плотности кинетической энергии [13].

Наиболее мелкие квазидвумерные течения соответствуют субмезомасштабному диапазону (1 – 100 км, [14]). Такие течения характеризуются преобладанием нелинейности над волновой динамикой, что выражается большими числами Россби ( $Ro > 1$ ) и нарушением геострофического баланса. В субмезомасштабном диапазоне асимптотическое разложение по числу Россби невозможно, и это означает, что такие течения не могут рассматриваться как двумерная несжимаемая жидкость. Решающую роль в динамике субмезомасштабных процессов может играть нелинейное взаимодействие с инерционно-гравитационными волнами [15].

Таким образом, в океане в средних широтах существует диапазон масштабов, 100 – 300 км, в котором динамика является сильно нелинейной и подчиняется законам геофизической квазидвумерной турбулентности [16]. Вихри, соответствующие этому диапазону, называются мезомасштабными и содержат в себе большую часть кинетической энергии океана [10]. Мезомасштабные вихри играют значительную роль в формировании общей циркуляции океана: они осуществляют турбулентное перемешивание скаляров и импульса; участвуют в преобразовании доступной потенциальной энергии в кинетиче-

скую, в формировании нелинейных взаимодействий между масштабами (каскад энергии), в формировании декадной изменчивости и могут ускорять средние течения [17]. Ниже мы дадим описание того, как устроена геофизическая квазидвумерная турбулентность на примере однослойных и двухслойных квазигеострофических уравнений.

Теоретическое описание вынужденной двумерной однородной турбулентности было развито в работах [18–20] (Kraichnan-Leith-Batchelor, KLB). Предполагается, что внешнее воздействие имеет фиксированный пространственный масштаб, задаваемый волновым числом  $k_f$ , и на этом масштабе отсутствует диссипация. В этом случае в Фурье-пространстве формируются инерционные интервалы по обе стороны от масштаба внешнего воздействия, по которым энергия передается в крупные масштабы, а энтрофия – в мелкие, причем известно выражение для равновесной плотности кинетической энергии:

$$E(k) = \begin{cases} C_1 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, & k < k_f \\ C_2 \eta^{2/3} k^{-3}, & k > k_f, \end{cases} \quad (1a)$$

$$(1b)$$

где для константы  $C_1$  известно приближенное значение [21]  $C_1 \approx 6$ , а  $\varepsilon$  и  $\eta$  – потоки энергии и энтрофии по соответствующим инерционным интервалам. Если предположить, что внешнее воздействие представлено бароклиной неустойчивостью, то данная модельная задача имеет непосредственное отношение к мезомасштабной турбулентности.

Теоретическое описание однородной квазидвумерной турбулентности на основе двухслойных квазигеострофических уравнений дано в работе [22]. Течение разделяется на две составляющие: среднее по вертикали (баротропная мода) и отклонение от среднего (бароклиная мода, представленная вертикальным сдвигом скорости). Вследствие соотношения термического ветра [10], вертикальный сдвиг скорости в геострофически-сбалансированном участке спектра всегда связан с горизонтальным градиентом плотности, т.е. с наклоном изопикнических поверхностей. Таким образом, бароклиная мода содержит в себе как кинетическую, так и потенциальную энергию, причем соотношение между ними определяется внутренним радиусом деформации Россби:  $L_R = \frac{NH}{\pi f}$ , где  $N$  – частота Брента-Вяйсяля. В средних широтах  $L_R = 10 \dots 50$  км, [13]. В крупномасштабных бароклиных течениях,  $L > 2\pi L_R$ , преобладает потенциальная энергия, а в мелкомасштабных – кинетическая. Согласно теории, предполагается, что в крупных масштабах имеется источник доступной

потенциальной энергии, вызванный неравномерным нагреванием поверхности. Кроме того, в крупных масштабах имеется сток кинетической энергии, связанный с рэлеевским трением. Для достижения равновесия необходимо, чтобы потенциальная энергия преобразовывалась в кинетическую, однако, как показано в работе [22], непосредственное взаимодействие бароклинной и баротропной мод в крупных масштабах невозможно вследствие того, что асимптотически в крупных масштабах бароклинная мода переносится баротропной как пассивная примесь. В частности это означает, что должен существовать прямой каскад бароклинной энергии в мелкие масштабы. Бароклинная энергия преобразуется в кинетическую вблизи горизонтального масштаба  $2\pi L_R$ . Этот процесс обычно объясняется бароклинной неустойчивостью [23]. Образовавшаяся в мелких масштабах кинетическая энергия следует по обратному каскаду в крупные масштабы. Данный процесс хорошо описывается однослойными квазигеострофическими уравнениями. Описанный механизм является источником энергии мезомасштабных вихрей и обычно считается верным и для примитивных уравнений океана [13].

Численные модели, участвовавшие в предыдущем проекте сравнения совместных моделей климата CMIP5 (Coupled Model Intercomparison Project), имели в качестве своей океанской компоненты модели океана с достаточно грубым горизонтальным разрешением порядка 1 градуса [24]. Такие модели явно не воспроизводят на вычислительной сетке мезомасштабные вихри и называются "вихренедопускающими". В моделях с таким шагом сеток воздействие подсеточных мезомасштабных вихрей на средние течения и поля температуры и солености учитывается с помощью параметризаций горизонтального перемешивания (например, изопикническая диффузия, [25]) и параметризации Гента-Маквильямса [26].

В текущей программе CMIP6 разрешение многих моделей океана было повышено до  $1/4$  градуса (см. таблицу A1 в работе [27]). При таком разрешении мезомасштабные вихри в средних широтах частично воспроизводятся явным образом. Такие модели называются "вихредопускающими". Однако, в вихредопускающих моделях вихревая динамика значительно ослаблена за счет низкого эффективного пространственного разрешения и ошибок аппроксимации численных схем. Это приводит к заниженным значениям вихревого переноса тепла, соли и импульса (в частности, к ослаблению меридиональных переносов), что, в свою очередь, существенно искажает среднее состояние



океана и чувствительность океанских моделей к атмосферным воздействиям. Параметризации "подсеточной" турбулентности, предназначенные для грубых моделей, оказываются неприменимыми (см., например, [28], где обсуждается применимость параметризации Гента-Маквилльямса). Для эффективного использования имеющегося пространственного разрешения требуется разработка и внедрение принципиально новых "подсеточных" замыканий. Например, в качестве простейшего шага на пути к повышению эффективного пространственного разрешения в современных моделях океана рекомендуется [28] повышать порядок диссипативного оператора в уравнении эволюции импульса.

С точки зрения способа воспроизведения квазидвумерной турбулентности, вихренедопускающие модели океана могут быть рассмотрены как RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes, [9]) модели квазидвумерной турбулентности, в которых воздействие мезомасштабных вихрей представлено средним тензором Рейнольдса. С другой стороны, вихренедопускающие модели могут рассматриваться как LES (Large Eddy Simulation, [9]) модели, то есть они разрешают турбулентное вихревое поле лишь частично, а масштаб расчетной сетки принадлежит инерционному энстрофийному интервалу. В обоих случаях модель турбулентной вязкости может быть использована для параметризации среднего эффекта явно не воспроизводимых турбулентных флуктуаций, однако она имеет негативное воздействие на LES модель, поскольку сглаживает явно воспроизводимое турбулентное вихревое поле вблизи сеточного масштаба, тем самым понижая эффективное разрешение модели.

Данная диссертация посвящена построению моделей подсеточной турбулентности, нацеленных на использование в моделях океана, частично разрешающих мезомасштабные вихри, то есть относящихся к классу LES моделей. Способ построения подсеточных замыканий в LES моделях хорошо изучен для случая трехмерной турбулентности [9], однако двумерному случаю в литературе уделено гораздо меньшее внимание. В частности, LES-подход должен учитывать существенно нелокальную (в Фурье-пространстве) природу взаимодействий и возможность переноса энергии от мелких масштабов к крупным: как показано в работах [29; 30], наиболее энергетически значимый процесс в двумерной турбулентности – обратный каскад энергии – поддерживается за счет взаимодействий с Фурье-гармониками, расположенными вблизи масштаба внешнего воздействия. Наличие численных дискретизаций адвекции в реальных расчетах представляет отдельную трудность при построении подсеточных замыканий

[31]: дискретизация играет роль дополнительной "фильтрации" уравнений движения.

Численные дискретизации могут играть особую роль в динамике двумерной жидкости при конечном пространственном разрешении. Уравнения двумерной идеальной жидкости обладают широким классом законов сохранения: импульса, энергии, завихренности, энстрофии, а также бесконечным числом казимиров (произвольные степени завихренности, [32]). Согласно теории MRS (Miller-Robert-Sommeria, [33]), влияние законов сохранения казимиров должно проявляться при формировании крупномасштабных когерентных структур в идеальной жидкости. Численные дискретизации адвекции могут сохранять точно различные наборы приведенных законов сохранения. Схемы Аракавы [34] позволяют сохранять первые моменты решения и различные наборы вторых моментов. Также существуют дискретизации, позволяющие сохранять на дискретном уровне весь набор казимиров: лагранжев алгоритм (Hamiltonian particle-mesh method, [35]) и специальный вид дискретных уравнений в Фурье-пространстве [36]. В работах [37; 38] показано, что статистически-равновесные состояния конечномерных аппроксимаций уравнений двумерной идеальной жидкости зависят от наличия закона сохранения третьего казимира (завихренность в третьей степени). В работе [39] показана роль численных аналогов законов сохранения уравнений двумерной идеальной жидкости в задаче ассимиляции данных наблюдений.

В данной диссертации мы предполагаем, что роль численных дискретизаций адвекции должна учитываться и при построении подсеточных LES параметризаций. В частности, по причине нелинейного характера уравнений, численные ошибки могут находиться на всех масштабах. В качестве примера можно привести ошибки наложения ("aliasing errors"). Даже если численные ошибки сконцентрированы в мелких масштабах, то, как указано в работе [40], эти ошибки могут с течением времени передаваться по спектру в крупные масштабы за счет нелинейных взаимодействий. В том случае, когда время такого перехода меньше характерного времени энергосзначимых процессов, распределение энергии по спектру может быть нарушено. Наличие или отсутствие законов сохранения у схемы адвекции может влиять на вид численных ошибок и их распределение по масштабам.

Далее мы будем называть "подсеточными силами" те силы, которые восполняют вклад неразрешенных на сетке масштабов и компенсируют ошибки

аппроксимации таким образом, чтобы скорректировать решение на грубой сетке, приблизив его к эталонному решению. В качестве эталонного решения принимается решение дискретной модели с высоким пространственным разрешением, воспроизводящей мезомасштабные вихри явно. Для того чтобы вычислить подсеточные силы явным образом, необходимо провести расчет при высоком пространственном разрешении, разделить масштабы на разрешаемые и неразрешаемые с помощью пространственной фильтрации и вычислить их взаимодействие, как сделано в работе [41] в случае трехмерной турбулентности и в работе [42] в случае двумерной. Способ учета численных дискретизаций адвекции при построении подсеточных сил приведен в работе [31]. Также возможно построение подсеточных сил в случае, когда дискретизация по пространству и времени не может быть произведена независимо: в работе [43] подсеточные силы построены для полулагранжева метода. Построение статистических характеристик подсеточных сил возможно без проведения расчета при высоком пространственном разрешении, если воспользоваться моделями типа EDQNM (Eddy-Damped Quasi-Normal Markovian) для описания подсеточных масштабов [44].

Качество подсеточных параметризаций может быть оценено в априорных и апостериорных экспериментах [45]. В априорных экспериментах исследуется, насколько хорошо подсеточная модель описывает подсеточные силы, вычисленные на траектории эталонной модели, имеющей высокое пространственное разрешение. В апостериорных экспериментах статистические характеристики решений грубой модели с подсеточной параметризацией сравниваются со статистическими характеристиками решений эталонной модели. В данной диссертации мы рассматриваем оба подхода к оценке качества подсеточных параметризаций.

Существует множество подходов к построению LES параметризаций в двумерной турбулентности, однако большинство параметризаций на сегодняшний день не опробовано в современных моделях океана по причине сложности алгоритма либо большого количества сделанных допущений (например, предположение об однородности турбулентности). Мы приведем обзор наиболее современных параметризаций двумерной и трехмерной подсеточной турбулентности, однако в диссертации будем ориентироваться на наиболее простые алгоритмы.

Наиболее простыми моделями, предназначенными для описания подсеточных сил в двумерной турбулентности, являются модели вихревой вязкости. Они имеют следующий вид:  $\sigma = (-1)^{n+1} \nu_n \Delta^n \omega$ , где  $\omega$  – завихренность,  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\nu_n$  – коэффициент вихревой вязкости,  $n \geq 1$  – целое число,  $\sigma$  – скорость изменения завихренности под воздействием подсеточных сил. Такие модели вносят диссипацию энтропии в самых мелких масштабах и препятствуют ее накоплению на масштабе расчетной сетки. Однако у этих моделей есть и очевидный недостаток: вместе с энтропией диссипируется и энергия, хотя согласно теории KLB прямой каскад энергии отсутствует. Модель подобия масштабов (Scale-Similarity Model, SSM, [46]) известна тем, что в отличие от диссипативных моделей обладает высокой корреляцией с подсеточными силами [45]. Результатом разложения модели подобия масштабов в ряд Тейлора является нелинейная градиентная модель [45]. В работе [47] показано, что такая модель обеспечивает высокую корреляцию с подсеточными силами в квазидвумерной турбулентности. Обычно считается, что модели SSM и их аналоги не обеспечивают достаточное количество диссипации, вследствие чего их нельзя использовать без дополнительных регуляризаций [45]. В частности, возможно использование модели SSM совместно с моделями вихревой вязкости (смешанные модели, [45]). В работе [48] сделана попытка регуляризовать модель подобия масштабов путем проектирования модели на диссипативные направления. Аналогичный подход предлагался и в двумерной турбулентности [49].

В работе [50] была предложена динамическая процедура оценки вихревой вязкости, основанная на тождестве Германо. Отметим, что в этом тождестве используется тензор потока импульса, который по своей функциональной форме совпадает с моделью подобия масштабов. В недавних работах динамические модели были исследованы в квазигеострофических уравнениях [51] и в примитивных уравнениях океана [52]. Основной проблемой при использовании динамических моделей является большое количество отрицательных значений вихревой вязкости. Для исключения отрицательных значений в работе [51] используется осреднение по пространству (т.е. теряется информация о локальных свойствах турбулентности), а в работе [52] коэффициент вихревой вязкости предполагается положительным. Таким образом, теряется информация об обратном распространении энергии из подсеточных масштабов, которое должно играть значительную роль при моделировании обратного каскада энергии при грубом пространственном разрешении.

Наиболее высокой корреляции с подсеточными силами можно достичь с использованием методов машинного обучения и нейронных сетей. Такие модели были построены для трехмерной турбулентности в работе [53] и для двумерной – в работе [54]. Основной проблемой остается, как и при использовании модели подобия масштабов, проблема численной устойчивости алгоритма. Для преодоления этой проблемы в обоих случаях использовалась проекция предсказанной тенденции на диссипативные направления. Дополнительной проблемой таких параметризаций является слабая обобщающая способность: веса нейронов необходимо обновлять при изменении разрешения и модельной задачи. Также существуют модели, в которых "подсеточные" вихри восстанавливаются на грубой сетке с помощью процедуры дефилтрации (Deconvolution models, [55]). Взаимодействие с такими вихрями может быть найдено явным образом, и обычно такие модели обладают высокой корреляцией с подсеточными силами. Подсеточные параметризации с применением дефилтрации решения исследовались в квазидвумерной турбулентности: в работе [56] дефилтрация производилась с помощью итерационного метода, а в работе [57] с помощью искусственных нейронных сетей. Основной проблемой таких моделей также является численная устойчивость: необходимо использовать дополнительные регуляризации, описанные выше.

Как следует из приведенного обзора, построение подсеточных моделей, имеющих высокую корреляцию с подсеточными силами, обычно сопряжено с проблемами численной устойчивости расчета. Существует и другой способ построения параметризаций – статистический. В этом случае учитываются физические свойства подсеточной турбулентности, однако корреляция с подсеточными силами не гарантируется. В работе [58] в трехслойных квазигеострофических уравнениях построена стохастическая модель подсеточных сил, которая воспроизводит пространственный радиус корреляции подсеточных сил, который меняется в зависимости от горизонтальной координаты, учитывает корреляцию между подсеточными силами по вертикали и воспроизводит характерный вид автокорреляционной функции по времени. Показано, что наиболее важной характеристикой автокорреляционной функции по времени является её интеграл, который определяет количество возвращаемой энергии. В работе [59] показано, что для моделирования стохастической тенденции можно использовать длинный временной ряд подсеточных сил (но вычисленный по другой траектории системы, соответствующей тому же статистически-равновесному

состоянию), и такая стохастическая параметризация позволяет восстановить декадную изменчивость в грубой модели.

В работе ([60], MTV, "Majda-Timofeyev-Vanden") предложено моделировать подсеточные масштабы стохастическим образом. Нелинейное уравнение, описывающее динамику подсеточных масштабов, заменяется на линейную стохастическую модель, где стохастический процесс моделирует нелинейное взаимодействие подсеточных масштабов между собой. Если дополнительно предположить разделение временных масштабов для разрешаемых и неразрешаемых течений, то оказывается возможным получить стохастические уравнения на разрешаемые масштабы. Недостатком данного подхода является дополнительное нелинейное взаимодействие между разрешаемыми течениями, которое задействует все базисные функции, участвующие в разложении. Построение такой параметризации возможно только при небольшом числе базисных функций. В работе [61] предложена стохастическая "суперпараметризация" неразрешаемых течений. Как и в предыдущей работе, нелинейное взаимодействие неразрешаемых масштабов с собой заменяется на стохастический процесс. Отличие заключается в том, что статистические характеристики подсеточных масштабов явно описываются с помощью дополнительного уравнения на матрицу ковариаций подсеточных масштабов. Преимуществом данного подхода является возможность статистически описывать неразрешенную на сетке грубой модели бароклинную неустойчивость.

В работе [62] предложено моделировать динамику конечномерных гамильтоновых систем с помощью стохастического возмущения грубой модели вдоль поверхности постоянной энергии, которое может быть осуществлено с помощью мультипликативного шума. Данный подход был обобщен на квазигеострофические уравнения в работах [63; 64]. Недостатком подхода является то, что теория не дает рекомендаций по выбору пространственной скоррелированности шума, в частности, в последних работах исследуются шумы, построенные на первых EOF ("Empirical Orthogonal Function") и DMD ("Dynamic Mode Decomposition") векторах.

В работе [65] рассматривается уравнение лагранжевого переноса потенциальной завихренности. Делается предположение, что неразрешаемые масштабы могут возмущать траекторию лагранжевой частицы, и этот процесс может быть описан с помощью введения стохастического поля адвекции. Такие модели относятся к классу "stochastic advection", и на сегодняшний день преимущественно

разрабатываются для правильного воспроизведения характеристик ансамбля решений.

В работе [66] предложено настраивать параметры стохастической параметризации таким образом, чтобы правильно воспроизводились первые и вторые моменты решения в каждой точке пространства. Для это организован итерационный процесс, где каждая итерация – это запуск модели на несколько лет с последующим осреднением статистических характеристик. Итерационная процедура позволяет найти дисперсию шума и постоянное воздействие, как функции координаты. Данная работа показывает, что найти оптимальную параметризацию возможно, однако её поиск является очень дорогостоящим.

В работе [67] показано, что если применить оператор Лапласа к лагранжевой производной потенциальной завихренности, то полученное выражение будет обладать высокой корреляцией с подсеточными силами. Для каждого значения данного выражения строится условное распределение подсеточных сил. Результирующая параметризация, состоящая из детерминистической и стохастической частей, протестирована в трехслойных квазигеострофических уравнениях в работе [13]. Показано, что и детерминистическая, и стохастическая добавки улучшают воспроизведение среднего течения. Детерминистическая часть параметризации может быть разложена в ряд по степеням оператора Лапласа [13].

Наиболее простым вариантом подсеточных моделей, которые восстанавливают энергетический баланс в грубой модели статистическим образом, являются модели обратного перераспределения кинетической энергии (ОПКЭ), в англоязычной литературе "Kinetic Energy Backscatter" (КЕВ, [68]). Параметры таких параметризаций могут быть оценены по спектральным характеристикам подсеточных сил [42], либо феноменологическим образом – предполагая сохранение энергии суммарной подсеточной моделью ("energetically consistent backscatter", [69]). В данной диссертации мы преимущественно рассматриваем параметризации, относящиеся к классу ОПКЭ.

Один из возможных способов моделирования ОПКЭ – это стохастическое возбуждение разрешаемых масштабов, "stochastic backscatter" [70]. Первые работы по стохастическим параметризациям были проведены в трехмерной турбулентности [41; 68; 71]. В LES моделях трехмерной мелкомасштабной турбулентности в пограничном слое атмосферы стохастический подсеточный форсинг впервые был применен в работе [72]. Стохастические параметризации

в LES моделях являются одним из возможных способов улучшить воспроизведение первых и вторых моментов вблизи поверхности, где модель имеет заведомо более грубую сетку, чем это необходимо для явного описания части инерционного интервала с прямым каскадом энергии [73; 74]. Позднее стохастические параметризации были адаптированы к квазидвумерным течениям [42; 44; 75; 76] на основе упрощенных квазигеострофических уравнений. В работах [77; 78] стохастические параметризации использовались для расширения ансамбля в ансамблевой модели прогноза погоды. В частности, использование таких параметризаций позволяет восстановить спектральную плотность кинетической энергии атмосферной турбулентности, которая характеризуется спектральным наклоном  $k^{-5/3}$  в мезомасштабном диапазоне.

В работе [69] было предложено усиливать мезомасштабные вихри в моделях океана с помощью комбинации параметризации ОПКЭ и параметризации турбулентной вязкости с оператором Лапласа в высокой степени. В недавних работах [79] и [80] ОПКЭ параметризации применяются в модельных задачах динамики атмосферы (тест Хелда-Суареза [81]) и океана (в приближении "зональный канал"), соответственно. В глобальной модели океана параметризация ОПКЭ впервые была исследована в 2020 году [82]. ОПКЭ параметризации способны улучшать среднее состояние модельного решения [69; 83; 84], спектр кинетической энергии [69; 83], вихревой поток тепла [85], глобальную термохалинную циркуляцию [83]. Большинство упомянутых выше работ были проведены с упрощенными численными моделями динамики двумерной и квазидвумерной жидкости. Собственная динамика таких идеализированных моделей обладает свойствами крупномасштабной двумерной и квазигеострофической турбулентности, характерной для океана, однако многие процессы, специфичные для реального океана, в них не учитываются.

В настоящий момент целесообразно, используя накопленный опыт, адаптировать параметризации ОПКЭ к моделям циркуляции океана. На этом пути имеется ряд проблем. Параметризации, построенные для квазигеострофических уравнений, по определению модифицируют только геострофически сбалансированную часть течения. Как отмечается в работах [13; 84], для того чтобы построить аналогичные параметризации в моделях на основе примитивных уравнений, необходимо модифицировать не только уравнение для импульса, но и уравнения для динамически активных скаляров (температуры и солености), причем согласованным образом. Другой открытый вопрос касается



вертикальной структуры параметризаций. Так, в работах [69; 83; 85] используются параметризации, не зависящие от вертикальной координаты (номера слоя), а в работах [78—80] параметры параметризации меняются с высотой.

Для моделей реального океана построение сложных подсеточных параметризаций, основанных на априорном анализе подсеточных сил, представляет определенную трудность, поскольку статистические характеристики моделируемой квазидвумерной турбулентности изменяются по пространству, глубине и сезонам года; течения состоят как из вихревой компоненты, так и из средних течений; в определение подсеточных сил неизбежно будут включены бароклинные процессы, которые обладают различными свойствами в зависимости от масштаба (мезомасштабная и субмезомасштабная турбулентность); имеются особенности в пристеночном регионе (западная интенсификация течений); дорогостоящими и трудно реализуемыми на практике являются подсеточные модели, основанные на преобразовании Фурье. Тем не менее, имеется возможность построить средний по области, глубине и сезонам года спектр генерации кинетической энергии подсеточными силами. Хотя такая характеристика не учитывает множество неоднородностей вихревого поля, она позволяет изучить, как соотносится масштаб и количество возвращаемой энергии в изучаемых параметризациях и в подсеточных силах. Такой анализ проведен в шестой главе диссертации для модели океана NEMO [86] в конфигурации Double Gyre.

В связи с увеличением компьютерных мощностей, разрешение моделей океана будет неуклонно расти. Тем не менее, результаты данной работы, нацеленной на улучшение воспроизведения мезомасштабных вихрей, останутся востребованными. Мезомасштабные вихри имеют горизонтальный размер, пропорциональный внутреннему радиусу деформации Россби, который уменьшается при увеличении широты. Так, ОПКЭ параметризации окажутся полезными для моделирования океана в северных широтах и регионального моделирования Арктики. Следовательно, разработка ОПКЭ параметризаций подсеточной квазидвумерной турбулентности является **актуальной задачей**.

**Целью** диссертационной работы является улучшение качества воспроизведения динамики океана современными численными моделями с помощью подсеточных параметризаций мезомасштабных вихрей.

Для достижения поставленной цели было необходимо решить следующие **задачи**:

1. Исследовать статистически-равновесные состояния, возникающие в двумерной идеальной жидкости и в двумерной форсированной вязкой жидкости, в зависимости от используемых численных аппроксимаций адвективного слагаемого.
2. Построить спектральные характеристики подсеточных сил в задаче вынужденной двумерной турбулентности с учетом численных аппроксимаций адвекции и соответствующие им схемнозависимые параметризации ОПКЭ.
3. Исследовать воспроизведение баротропной неустойчивости при грубом пространственном разрешении и изучить влияние подсеточных параметризаций на рост неустойчивых мод.
4. Включить параметризации ОПКЭ в модель океана NEMO и провести расчеты при вихредопускающем разрешении.
5. Провести сравнение спектральных характеристик подсеточных сил и подсеточных параметризаций ОПКЭ в модели NEMO.

**Методология и методы исследования.** Результаты работы получены в ходе проведения расчетов с численными гидродинамическими моделями различного уровня сложности. При этом использовались численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных и методы статистического анализа характеристик турбулентных течений. При проведении расчетов использовались многопроцессорные вычислительные системы. Расчеты были проведены с использованием разработанных блоков параметризаций, реализованных в различных численных гидродинамических моделях.

**Научная новизна заключается в том, что впервые:**

1. Продемонстрирована роль численных аналогов законов сохранения и различных аппроксимаций уравнений двумерной жидкости в формировании обратного каскада энергии.
2. Предложено моделировать ОПКЭ с помощью модели подобия масштабов.
3. Продемонстрирована роль подсеточных замыканий в формировании развития неустойчивости баротропного струйного течения в статистическом смысле.
4. Проведено сравнение стохастического и детерминистического подходов к моделированию ОПКЭ в примитивных уравнениях океана.

5. Предложен новый метод спектрального анализа неразрешаемых нелинейных взаимодействий на основе метода релаксации, и показано, что характерный пространственный масштаб обратного перераспределения кинетической энергии в океане определяется масштабом бароклинной неустойчивости. Предложены и реализованы параметризации ОПКЭ с соответствующими спектральными характеристиками.

**Достоверность** изложенных в диссертационной работе результатов обеспечивается проверкой предложенных параметризаций на тестовых задачах, включающих в себя проведение прямого численного моделирования идеализированных двумерных турбулентных течений, а также согласованностью полученных результатов с известными теоретическими моделями и результатами вычислительных экспериментов, опубликованными другими авторами.

**Теоретическая значимость.** На основе спектрального анализа подсеточных сил выделены особенности ОПКЭ для классических двумерных течений и океанической циркуляции. Исследованы различные подсеточные модели с точки зрения их применимости для воспроизведения ОПКЭ.

**Практическая значимость.** Применение специализированных параметризаций ОПКЭ позволит увеличить эффективное разрешение моделируемой квазидвумерной турбулентности, что в свою очередь позволит производить расчеты с моделью климата на длительные промежутки времени с незначительными затратами на вычислительные ресурсы.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Установлена роль численных аналогов законов сохранения, присущих уравнениям двумерной жидкости, в формировании обратного каскада энергии. Отсутствие закона сохранения интегральной завихренности приводит к ложному каскаду энергии в масштаб, определяемый размером области, а отсутствие закона сохранения энтропии приводит к ослаблению обратного каскада энергии.
2. Показано, что модель подобия масштабов воспроизводит спектральный приток энергии от подсеточных сил. По этой причине ее можно использовать как параметризацию ОПКЭ для восстановления обратного каскада энергии, если произвести фильтрацию тенденции в мелкомасштабном диссипативном интервале.
3. Показано, что подсеточные параметризации способны ускорять переход к турбулентному режиму течения в задаче моделирования баротроп-

- ной неустойчивости струйного течения. Механизм работы подсеточных моделей различный: параметризация отрицательной вязкости препятствует сглаживанию среднего течения; модель подобия масштабов модифицирует линеаризованную систему и увеличивает инкременты роста неустойчивых мод; стохастическая параметризация возбуждает неустойчивые моды.
4. Показано, что моделирование ОПКЭ в примитивных уравнениях океана может быть осуществлено как стохастическим, так и детерминистическим образом. Обе параметризации восстанавливают уровень вихревой энергии, вихревой меридиональный поток тепла и меридиональную опрокидывающую циркуляцию.
  5. В модели NEMO реализован новый подход к анализу неразрешаемых нелинейных взаимодействий. Подход основан на методе релаксации. Показано, что характерный пространственный масштаб обратного перераспределения кинетической энергии определяется масштабом бароклинной неустойчивости. Предложены и реализованы параметризации ОПКЭ с соответствующими спектральными характеристиками. Модель отрицательной вязкости верно воспроизводит спектральную плотность возвращения кинетической энергии, а стохастическая параметризация требует настройки радиуса пространственной корреляции случайного поля.
  6. Разработан комплекс программ, предназначенный для априорного анализа подсеточных сил и моделирования тенденций, связанных с ОПКЭ, в гидродинамических моделях двумерной и квазидвумерной турбулентности, а именно в DNS модели НИВЦ МГУ и ИВМ РАН и в модели океана NEMO.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на следующих международных и российских конференциях: 58-я, 59-я, 60-я, 61-я, 62-я научные конференции МФТИ, Москва, Россия, 2015 – 2019; Международная молодежная школа и конференция по вычислительно-информационным технологиям для наук об окружающей среде: "CITES-2017", 2017, и "CITES-2019", 2019, Москва, Россия; 21-я Всероссийская школа-конференция молодых ученых "Состав атмосферы. Атмосферное электричество. Климатические процессы" (CatЭП-2017), Борок, Россия, 2017; International Symposium Topical Problems of Nonlinear Wave Physics (NWP-2017), Нижний Новго-

род, Россия, 2017; International Union of Geodesy and Geophysics 32nd IUGG Conference on Mathematical Geophysics, Нижний Новгород, Россия, 2018; Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения академика А.М. Обухова "Турбулентность, динамика атмосферы и климата", Москва, Россия, 2018 года; Всероссийский форум Суперкомпьютерные технологии и искусственный интеллект, Нижний Новгород, Россия, 2018; Международная конференция "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2019" (АПВПМ-2019), Новосибирск, Россия, 2019; Winter school "Physics and Mathematics of Turbulent flows at different scales", Лес Уж, Франция, 2019; Summer school "Mathematics for Climate and the Environment", Каржез, Корсика, Франция, 2019; Workshop on Novel Approaches in Observations and Modeling of Geophysical Turbulence, Москва, 2019; EGU General Assembly 2020, Вена, Австрия, 2020; ECMWF Annual Seminar 2020 (online); Всероссийская конференция, посвященная памяти академика Александра Михайловича Обухова "Турбулентность, динамика атмосферы и климата", Москва, 2020; AGU fall meeting, 2020 (online).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 8 работ [1–8] в рецензируемых изданиях, которые индексируются в международных базах данных Scopus или Web of Science. Из них 4 работы [3; 5–7] опубликованы в журналах из списка ВАК по профилю специальности.

**Личный вклад.** Изложенные в диссертации результаты получены лично автором. Автор принимал участие как в постановке задач, так и в проведении численных экспериментов и интерпретации результатов.

**Объем и структура диссертационной работы.** Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и четырех приложений. Полный объём диссертации составляет 152 страницы, включая 49 рисунков и 9 таблиц. Список литературы содержит 158 наименований.

**Содержание работы.** В **первой и второй** главах диссертации исследуется роль численных аппроксимаций адвекции в формировании крупномасштабных когерентных структур в идеальной двумерной жидкости и обратного каскада энергии в вынужденной двумерной турбулентности. В **третьей** главе проводится анализ подсеточных сил в задаче моделирования обратного каскада энергии и строятся схемозависимые параметризации ОПКЭ. Показано, что использование параметризаций ОПКЭ позволяет восстановить обратный каскад энергии. Кроме того, конечно-разностные схемы второго порядка об-

ладают схожими спектральными характеристиками подсеточных сил. По этой причине, в оставшихся трех главах исследуется только одна схема второго порядка. В **четвертой** главе исследуется роль подсеточных параметризаций в задаче развития баротропной неустойчивости струйного течения. Показано, что подсеточные параметризации способны ускорить наступление турбулентного режима течения. В **пятой** главе исследуются параметризации ОПКЭ в модели океана NEMO [86] в конфигурации Double Gyre. Показано, что стохастическая и детерминистическая параметризаций способны улучшить воспроизведение океанической квазидвумерной турбулентности. В частности, улучшения наблюдаются в уровне вихревой кинетической энергии, вихревом потоке тепла и меридиональной опрокидывающей циркуляции. В **шестой** главе в конфигурации Double Gyre проведен спектральный анализ притока кинетической энергии от подсеточных сил и проведено сравнение с притоками, формируемыми построенными подсеточными параметризациями. В **заключении** перечислены основные результаты работы.

**Благодарности.** Автор выражает благодарность научному руководителю Глазунову А.В. и соавторам работ Дымникову В.П., Грицуну А.С., Мортикову Е.В., а также Лыковому В.Н., Яковлеву Н.Г., Нечепуренко Ю.М., Демьянко К.В. и Шашкину В.В. за конструктивные замечания.

Работа поддержана грантами РФФ (14-27-00126, 17-17-01210), грантами РФФИ (19-35-90023, 18-05-60184, 16-55-12015, 18-05-60126), грантом Президента НШ-9836.2016.5 и Московским центром фундаментальной и прикладной математики (Соглашение с Минобрнауки России № 075-15-2019-1624).

## Глава 1. Исследование когерентных структур в идеальной (невязкой) жидкости и в форсированной турбулентности

Проблема изучения двумерной турбулентности очень важна в геофизической гидродинамике, поскольку атмосфера и океан квазидвумерны. В геофизической гидродинамике есть две ключевые проблемы: прогноз погоды и прогноз изменений климата. С математической точки зрения первая задача связана с исследованием поведения решения системы на конечном промежутке времени и для ее обоснования вполне достаточно теорем глобальной разрешимости и теорем сходимости решений конечномерных аппроксимаций к решению дифференциальной задачи. Для двумерных уравнений как идеальной жидкости, так и вязкой, такие теоремы существуют [87–90]. Однако константы сходимости, если они определены, как правило, экспоненциально зависят от промежутка времени, на котором исследуется задача, и, при устремлении этого промежутка к бесконечности, эти теоремы теряют смысл. Такие ситуации возникают, когда мы исследуем задачи моделирования климата на произвольно большом промежутке времени. Следовательно, проблема изучения динамики двумерной жидкости на произвольно большом промежутке времени в теории климата является ключевой. Эта динамика, конечно, различна для вязкой жидкости (динамика на аттракторе) и для идеальной жидкости. В асимптотическом случае, когда исследуется динамика двумерной жидкости при очень малой вязкости (так называемая разрушающаяся турбулентность), двумерная жидкость на достаточно больших промежутках времени ведет себя как идеальная (см., например, [91; 92]).

В реальных задачах прогноза погоды и теории климата мы имеем дело с квазидвумерной жидкостью при наличии форсинга и диссипации, и проблемы идеальной двумерной жидкости с этой точки зрения кажутся вполне академическими. Однако это далеко не так, если иметь в виду, что, например, в моделируемых распределениях энергии по спектру существуют так называемые инерционные интервалы, где диссипация и форсинг малы, и жидкость ведет себя как идеальная [18]. Характерные черты поведения идеальной жидкости могут наблюдаться и в других характеристиках вязкой жидкости, на которых мы остановимся ниже. С этой точки зрения изучение динамики идеальной жидкости является задачей не только академической, но и по существу

полезной на практике. Поскольку практические задачи прогноза погоды и теории климата мы можем решать только численно, то весьма важной проблемой представляется задача исследования свойств конечномерных аппроксимаций исходной дифференциальной задачи [93–96]. При исследовании аппроксимаций уравнений двумерной идеальной жидкости естественным условием (кроме условия аппроксимации и устойчивости) является условие их принадлежности к классу систем гидродинамического типа. Напомним, что в работе [97] А.М. Обухов определил конечномерную систему

$$\frac{du_i}{dt} = F_i(u), \quad u|_{t=0} = u^0 \quad (1.1)$$

относительно неизвестной  $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]$  как систему гидродинамического типа, если она удовлетворяет трем требованиям:

1. Система (1.1) квадратично нелинейна.
2. Фазовый поток несжимаем:

$$\sum_i \frac{\partial F_i}{\partial u_i} = 0. \quad (1.2)$$

3. Система имеет хотя бы один квадратичный закон сохранения  $(Su, u) = \text{const}$ , где  $S$  – положительно-определенная симметричная матрица.

Задачей данной главы является исследование статистических свойств конечномерных аппроксимаций уравнений, описывающих динамику двумерной идеальной жидкости и принадлежащих классу систем гидродинамического типа согласно приведенному выше определению.

Прежде чем перейти к конкретной формулировке этой задачи, кратко остановимся на фундаментальных свойствах систем уравнений, описывающих динамику двумерной идеальной жидкости. Запишем исходные уравнения динамики двумерной идеальной несжимаемой жидкости в терминах завихренности и функции тока:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = 0, \quad (1.3)$$

здесь  $\omega = \Delta \psi$  – завихренность,  $\psi$  – функция тока,  $J(\psi, \omega) = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}$  – якобиан. Систему (1.3) будем рассматривать в двоякопериодическом канале  $D$  в декартовой системе координат, так что  $\int_D \omega dD = 0$ . Хорошо известно [98], что система (1.3) обладает законом сохранения энергии

$$E = -\frac{1}{2} \int_D \psi \omega dD = \text{const} \quad (1.4)$$



и бесконечным числом инвариантов (казимиров) вида:

$$\int_D F(\omega) dD = \text{const.} \quad (1.5)$$

Если мы положим  $F(\omega) = \frac{1}{2}\omega^2$ , то будем иметь закон сохранения энтропии

$$Z = \frac{1}{2} \int_D \omega^2 dD = \text{const.} \quad (1.6)$$

Из (1.4) и (1.6) следует закон сохранения средневзвешенного по энергии квадрата волнового числа:

$$\overline{k^2} = \frac{Z}{E} = \text{const.} \quad (1.7)$$

Бесконечное число законов сохранения (1.5) эквивалентно сохранению распределения завихренности по площадям [99], заданного формулой:

$$\frac{dD}{D} = \rho(\omega) d\omega, \quad (1.8)$$

т.е.  $\rho(\omega)$  есть инвариант. Если мы введем понятие информационной энтропии [100], то отсюда следует, что энтропия

$$S = - \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \ln \rho d\omega, \quad \rho \equiv \rho(\omega) \quad (1.9)$$

будет также инвариантна.

Поскольку любая конечномерная аппроксимация, даже принадлежащая классу систем гидродинамического типа, не может иметь бесконечного числа инвариантов, то исследование поведения плотности распределения завихренности по площадям  $\rho(\omega)$  представляется задачей весьма интересной и перспективной не только для идеальной жидкости, но и в случае реальной атмосферы [100].

Ниже нам понадобится еще одно определение энтропии [101]:

$$S = - \int_D dD \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \ln \rho d\omega, \quad \rho \equiv \rho(x, y, \omega), \quad (1.10)$$

где  $\rho(x, y, \omega)$  используется для задания ансамбля в теории среднего поля Miller-Robert-Sommeria (MRS) [33; 102] и обозначает распределение по площадям, зависящее от точки пространства. Обзор MRS-теории можно найти в работах [1; 101].

Обратимся теперь к другим характеристикам квазиравновесного состояния идеальной двумерной жидкости. Эти характеристики исследовались различными авторами [91; 92; 94; 96]. Согласно MRS-теории, энергия в квазиравновесном состоянии сосредоточена в крупномасштабной когерентной структуре, определяемой стационарным решением системы (1.3), см. [101]:

$$\overline{\omega} = F(\overline{\psi}), \quad (1.11)$$

где верхняя черта обозначает ансамблевое осреднение, позволяющее избавиться от явного описания вклада мелкомасштабных нестационарных течений. Если использовать вариационный принцип максимизации энтропии (1.10) при заданной энергии  $E$  и энстрофии  $Z$ , то функция  $F$  будет линейной с наклоном, соответствующим минимальному по модулю собственному числу оператора Лапласа  $\lambda_{\min}$  [101]:

$$\Delta \psi_1 = -|\lambda_{\min}| \psi_1, \quad (1.12)$$

где  $\psi_1$  – собственная функция оператора Лапласа. Поскольку достаточным условием устойчивости стационарного решения является условие [98]

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{\psi}} > -|\lambda_{\min}|,$$

то мы можем заключить, что критерий устойчивости результирующего стационарного решения (1.12) будет в этом случае соответствовать предельной точке признака устойчивости.

Итак, главными задачами, рассматриваемыми в настоящей главе, будут:

1. Исследование распределения завихренности по площадям, воспроизводимого различными аппроксимациями уравнений динамики двумерной идеальной несжимаемой жидкости, принадлежащих классу систем гидродинамического типа.
2. Исследование квазиравновесных когерентных структур, воспроизводимых этими конечномерными аппроксимациями.
3. Сравнение этих когерентных структур со структурами, возникающими в вязкой жидкости со случайным форсингом.

## 1.1 Разностные схемы и методы решения

В качестве предмета исследования возьмем три разностные схемы, аппроксимирующие уравнения (1.3) и принадлежащие классу систем гидродинамического типа. Схемы строятся на основе различного представления якобиана  $J(\psi, \omega)$ . Хорошо известно, что якобиан  $J$  можно записать в трех представлениях

$$J_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad \text{– потоковая форма,} \quad (1.13)$$

$$J_2 = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \omega \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \omega \right) \quad \text{– первая дивергентная форма,} \quad (1.14)$$

$$J_3 = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \psi \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \psi \right) \quad \text{– вторая дивергентная форма.} \quad (1.15)$$

На основе этих трех форм можно, используя симметричные аппроксимации производных на равномерной сетке, построить пространственные аппроксимации, сохраняющие энтрофию, энергию, энергию и энтрофию (схему Аракавы [34]). Несжимаемость фазового потока (1.2) для приведенных аппроксимаций доказана в работе [95].

Схема, сохраняющая энергию (обозначается как **E**), будет иметь вид:

$$J^h = \frac{1}{2} [J_1^h(\psi_h, \omega_h) + J_3^h(\psi_h, \omega_h)], \quad (1.16)$$

где  $J_1^h$ ,  $J_3^h$  – аппроксимации  $J_1$  и  $J_3$ .

Схема, сохраняющая энтрофию **Z**:

$$J^h = \frac{1}{2} [J_1^h(\psi_h, \omega_h) + J_2^h(\psi_h, \omega_h)], \quad (1.17)$$

и схема, сохраняющая энергию и энтрофию **ZE**:

$$J^h = \frac{1}{3} [J_1^h(\psi_h, \omega_h) + J_2^h(\psi_h, \omega_h) + J_3^h(\psi_h, \omega_h)]. \quad (1.18)$$

Если для аппроксимации уравнения (1.3) использовать схему Кранка–Николсон вместе с пространственными аппроксимациями (1.16), (1.17), (1.18), то все вышеприведенные законы сохранения будут выполняться на каждом шаге по времени [95]. Результирующая процедура интегрирования по

времени состоит в решении системы нелинейных алгебраических уравнений с квадратичной нелинейностью следующего вида:

$$\frac{\omega_h^{n+1} - \omega_h^n}{\Delta t} + J^h \left( \frac{\psi_h^{n+1} + \psi_h^n}{2}, \frac{\omega_h^{n+1} + \omega_h^n}{2} \right) = 0, \quad (1.19)$$

где  $n$  обозначает номер слоя по времени. Для нахождения численного решения этой системы используется метод простых итераций, подробно описанный в работе [1]. Количество итераций равно 5, и это обеспечивает сохранение квадратичных инвариантов с относительной точностью от  $10^{-4}$  до  $10^{-3}$ .

## 1.2 Результаты численных экспериментов со схемами, аппроксимирующими уравнения идеальной жидкости

Прежде чем перейти к обсуждению результатов численных экспериментов, сделаем несколько замечаний.

1. В случае бесконечномерных пространств (дифференциальная постановка задачи) мы имеем аналог теоремы вложения [98]

$$E = -\frac{1}{2}(\psi, \omega) \leq \frac{1}{|\lambda_{\min}|} \frac{(\omega, \omega)}{2} \equiv \frac{1}{|\lambda_{\min}|} Z,$$

где  $\lambda_{\min}$  – минимальное по модулю собственное число оператора Лапласа, а круглые скобки обозначают скалярное произведение, т.е.  $(\psi, \omega) = \int \psi \omega dD$ . Для конечномерного пространства в случае равномерной квадратной сетки соотношения между энергией и энтропией можно получить следующим образом. Пусть

$$E_h = -\frac{1}{2}(\psi_h, \omega_h)_h, \quad Z_h = \frac{1}{2}(\omega_h, \omega_h)_h,$$

где  $(\cdot, \cdot)_h$  – скалярное произведение в конечномерном пространстве. Пусть  $S_h$  – симметричная отрицательно-определенная аппроксимация оператора Лапласа. Рассмотрим пару подпространств, ортогональных константе,  $(\omega_h, 1)_h = 0$  и  $(\psi_h, 1)_h = 0$ , на которых  $S_h$  действует взаимнооднозначно. Тогда  $\omega_h = S_h \psi_h$  и  $\psi_h = S_h^{-1} \omega_h$ . Отсюда будем иметь двустороннюю оценку уровня энергии:

$$\frac{1}{|\lambda_{\max}^h|} Z_h \leq E_h \leq \frac{1}{|\lambda_{\min}^h|} Z_h, \quad (1.20)$$

где максимальное и минимальное по модулю собственные числа матрицы  $S_h$  зависят от параметров задачи следующим образом:

$$|\lambda_{\max}^h| = \frac{\alpha}{h^2}, \quad \alpha = \text{const}, \quad h - \text{ шаг сетки}$$

$$|\lambda_{\min}^h| = \beta, \quad \beta - \text{ константа, определяется размером области.}$$

Таким образом, если рассмотреть схему, сохраняющую только энтрофию, то энергия будет ограничена сверху константой, не зависящей от шага сетки:

$$E_h \leq \frac{1}{\beta} Z_h. \quad (1.21)$$

При этом генерация энергии, если она есть, происходит на крупных масштабах, так как средний квадрат волнового числа  $\overline{k_h^2} = \frac{Z_h}{E_h}$  в этом случае должен уменьшаться. Кроме того, возможна практически полная диссипация энергии [95].

Если рассматривается схема, сохраняющая только энергию, то энтрофия будет удовлетворять соотношению

$$Z_h \leq \frac{\alpha}{h^2} E_h. \quad (1.22)$$

Это соотношение означает, что средний квадрат волнового числа  $\overline{k_h^2} = \frac{Z_h}{E_h} \leq \frac{\alpha}{h^2}$  может неограниченно нарастать при  $h \rightarrow 0$ , т.е. в схеме возможен каскад энергии в высокие волновые числа.

2. Соотношения, соответствующие минимальному по модулю собственному числу оператора Лапласа, действующего на функции, определенные на двоякопериодическом канале с равными сторонами, являются вырожденными, поскольку этому собственному числу соответствует собственное подпространство размерности 2. Это означает, что вид когерентной структуры, формирующейся на этом подпространстве и удовлетворяющей соотношению (1.12), однозначно не определен.
3. Вообще говоря, результаты квазиравновесных распределений зависят от конфигурации начального состояния, в частности от среднего волнового числа [93]. Если задать начальное состояние таким, что  $\overline{k^2} = Z/E \gg |\lambda_{\min}|$ , то, как было показано в работах [1; 95; 96], квазиравновесные распределения по площадям для систем гидродинамического типа будут определяться флуктуациями относительно среднего состояния. Это распределение должно быть близко к нормальному, поскольку

энтропия (1.9) максимизируется на нормальном распределении при наличии квадратичного инварианта (см., например, [103]).

4. Сходимость к квазиравновесному состоянию в системе гидродинамического типа должна происходить, если в определение сходимости будет включена "фильтрация", например, осреднение по пространству  $\bar{\omega}$  (мы будем осреднять по ячейкам, состоящим из  $n \times n$  расчетных точек) или осреднение по времени  $\langle \omega \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \omega dt$  (сходимость по Чезаро). Подробная теория сходимости по Чезаро приведена в работе [104]. В наших численных экспериментах везде будет оговорено, какая процедура используется.

Численные эксперименты для всех схем (E, Z, ZE) проводились при следующих параметрах. Двокопериодический канал  $D$  имеет размер  $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ , разрешение расчетной сетки  $512 \times 512$  точек. Начальное поле завихренности состоит из  $8 \times 8$  квадратных участков, на которых завихренность постоянна и принимает случайным образом одно из значений  $\{-1 + a, -1 + 3a, \dots, 1 - a\}$ ,  $a = 1/64$ , причем каждое значение выбирается ровно один раз. Похожие начальные данные использовались в работе [105] для упрощения теоретического анализа равновесных состояний и называются "vortex patches". Средний квадрат волнового числа для таких начальных данных равен  $\bar{k}^2 = Z/E = 4.4 > |\lambda_{\min}| = 1$ . Расчет проведен на большой промежуток времени  $t \in (0, 50000)$ . Полное статистическое равновесие для всех схем наступает не позднее момента  $t \approx 10000$ .

Характерный вид решений для невязкой жидкости (схема ZE) в начальные моменты времени и осредненные по пространству поля завихренности приведены на рисунке 1.1. Здесь для наглядности используется более высокое пространственное разрешение.

Сначала приведем результаты для схемы с двумя инвариантами (ZE), а затем проведем сравнение этой схемы с двумя другими (Z, E).

В расчете со схемой ZE энергия и энтрофия сохраняются с относительной точностью  $10^{-4}$  на всем времени расчета, см. рисунки 1.2а и 1.2b. На рисунке 1.3 приведено распределение завихренности по площадям  $\rho(\omega)$  в последний момент времени. Из рисунка следует, что распределение имеет гауссовый вид. Дисперсия распределения определяется начальными данными и равна  $2Z/D$ . Воспользуемся коэффициентом эксцесса  $\gamma = \frac{\int \omega^4 \rho d\omega}{(\int \omega^2 \rho d\omega)^2}$  для определения близости распределения по площадям  $\rho(\omega)$  к гауссовому (для стандартного нормального распределения  $\gamma = 3$ ). На рисунке 1.4 приведен коэффициент

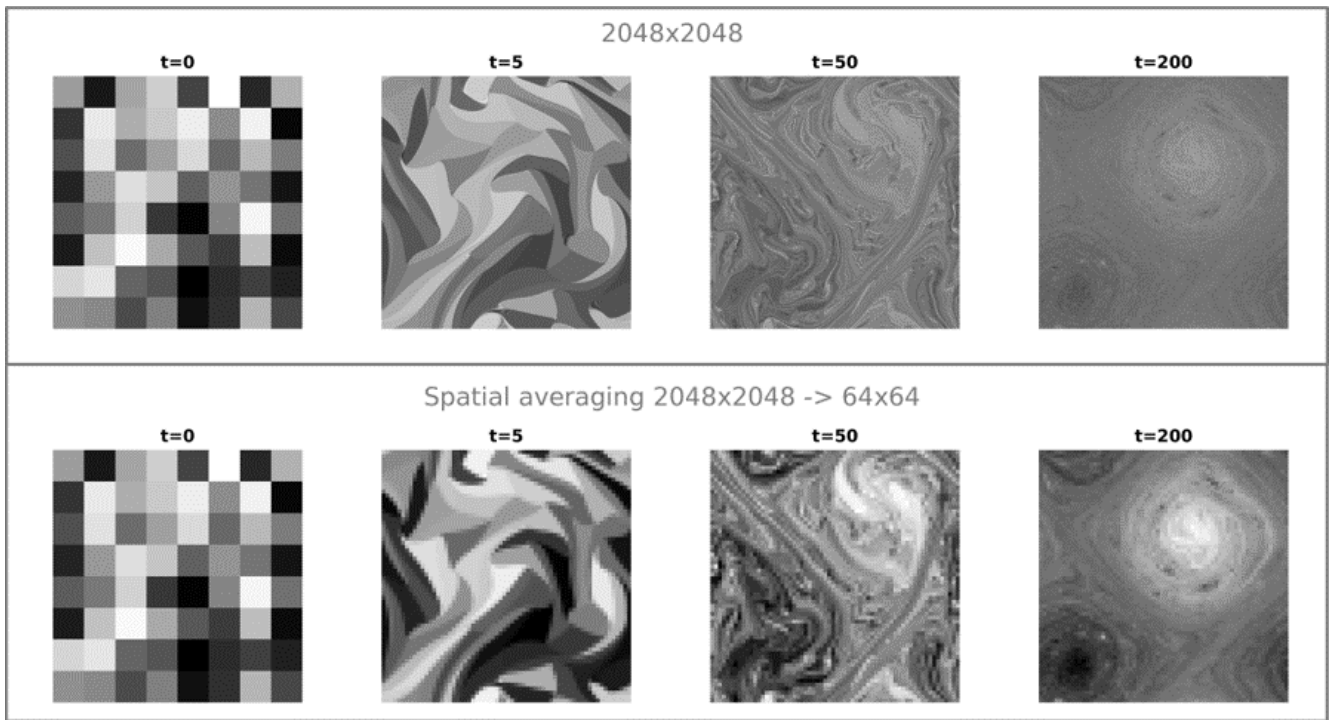


Рисунок 1.1 — Эволюция завихренности в эксперименте без вязкости для схемы ZE в начальные моменты времени. Сверху показано мгновенное поле завихренности при разрешении  $2048^2$ , а снизу его осреднение по квадратным участкам до разрешения  $64^2$ .

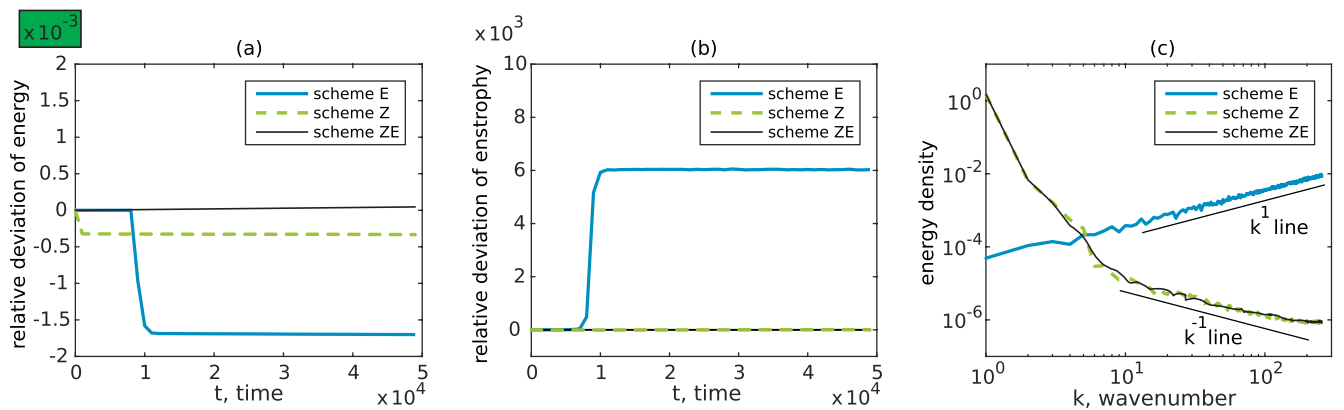


Рисунок 1.2 — Относительное отклонение энергии и энстрофии от начальных значений (a), (b); а также спектральное распределение энергии (c) в последний момент времени  $t = 50000$  для трех схем (E, Z, ZE). Обратите внимание: масштаб рисунков (a) и (b) отличается на 6 порядков.

эксцесса в зависимости от времени при трех различных разрешениях (стандартное разрешение  $512 \times 512$  и еще два:  $128 \times 128$  и  $2048 \times 2048$ ). На интервале времени  $t \in (0,50)$  наблюдается резкий рост этого коэффициента, связанный с установлением статистического равновесия в мелких масштабах. Далее, на длительном промежутке времени  $t \in (50,10000)$  к полному статистическому

равновесию приходят и крупные масштабы, и коэффициент эксцесса становится практически равным 3 для всех разрешений (на рисунке не показано). Возьмем в качестве характерного времени установления мелких масштабов время, в течение которого коэффициент эксцесса в первый раз достигает значения 3. Характерное время медленно растет при повышении разрешения ( $T \sim N^{0.3}$ , где  $N$  – число узлов вдоль одного направления), см. рисунок 1.4. Это – иллюстрация теоремы сходимости: чем выше разрешение расчетной сетки, тем дольше сохраняется исходное распределение  $\rho(\omega)$ .

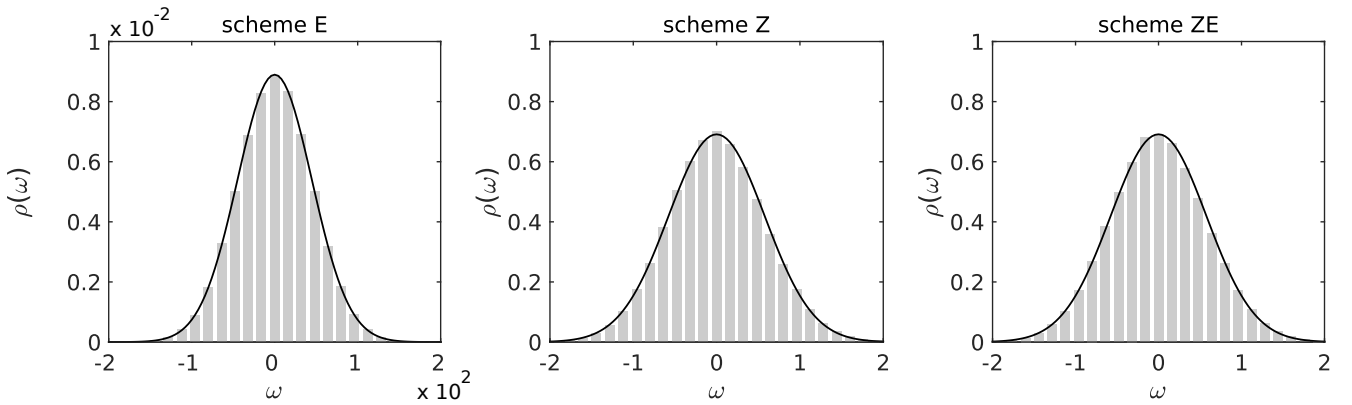


Рисунок 1.3 — Гистограмма распределения завихренности по площадям в последний момент времени  $t = 50000$  для трех схем (E, Z, ZE). Количество интервалов гистограммы равно 25. Черная кривая – гауссово распределение с эквивалентной дисперсией.

Опишем свойства состояния статистического равновесия для схемы Аракavy ZE. Из теории следует, что в мелких масштабах энтрофия должна равномерно распределяться по фурье-гармоникам [1], и это подтверждается в численном эксперименте: спектр энергии имеет убывающую степенную зависимость  $E(k) \sim k^{-1}$  в мелких масштабах, см. рисунок 1.2с. Из этого же рисунка следует, что большинство энергии скапливается в крупных масштабах, в результате чего образуются крупномасштабные когерентные структуры, имеющие характерный размер, сравнимый с размером области, см. рисунок 1.5. Два крупных вихря образуются к моменту времени  $t \approx 200$ , после чего следуют медленные процессы установления статистического равновесия. Крупные вихри близки к стационарным решениям уравнений идеальной жидкости: точечная диаграмма для осредненных по времени полей  $\langle \psi \rangle - \langle \omega \rangle$  описывается некоторой функциональной зависимостью, см. рисунок 1.6. Эта функциональная зависимость близка к линейной (1.12), а при больших значениях функции тока наблюдаются



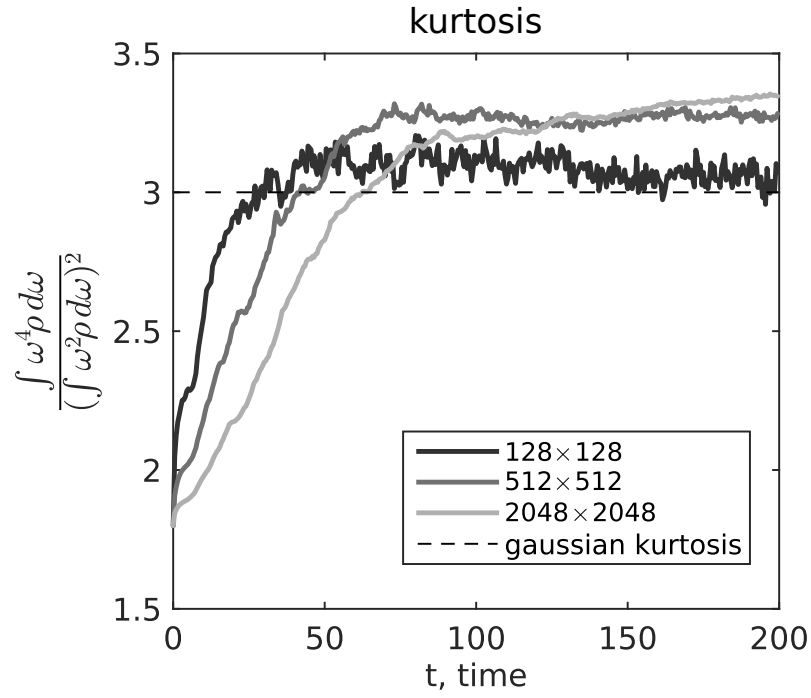


Рисунок 1.4 — Коэффициент эксцесса распределения  $\rho(\omega)$  для расчета по схеме ZE при трех различных разрешениях.

отклонения от линейной зависимости, таким образом, качественно подтверждается формула (1.11).

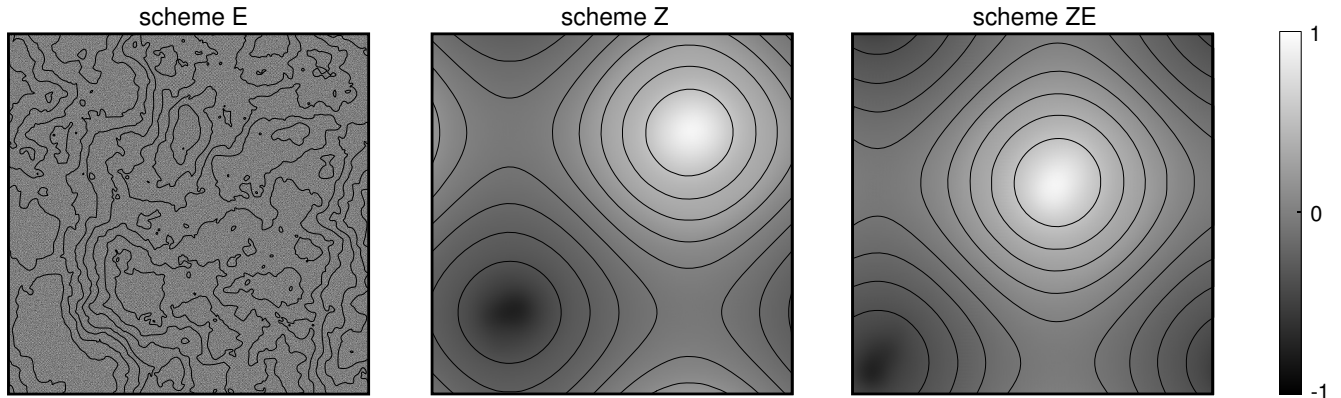


Рисунок 1.5 — Завихренность (обозначена цветом) и функция тока (изображена линиями), предварительно осредненные на интервале времени  $t \in (20000, 50000)$ .

Схема с одним квадратичным инвариантом – энтрофией (Z) дает аналогичные со схемой ZE результаты, см. рисунки 1.2, 1.3, 1.5, 1.6. В данном случае наблюдается приближенное сохранение энергии на всем протяжении расчета, см. рисунок 1.2а. Аналогичный результат приведен в работе [106]. Отметим, что другие системы гидродинамического типа с инвариантом – энтрофией могут диссипировать энергию, и тогда когерентных структур не наблюдается [95].

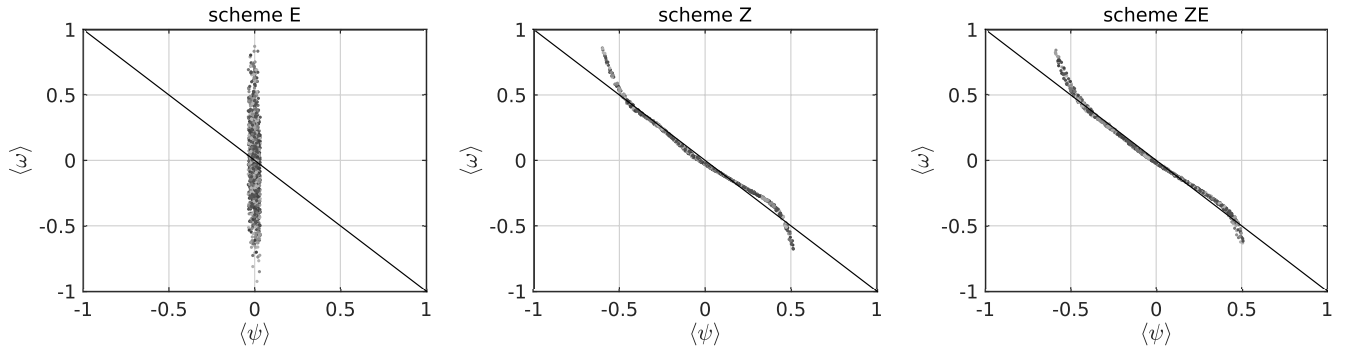


Рисунок 1.6 — Точечная диаграмма  $\langle \psi \rangle - \langle \omega \rangle$ , где угловыми скобками обозначено осреднение на интервале времени  $t \in (0, 50000)$ . Черная линия соответствует соотношению  $\langle \omega \rangle = -\langle \psi \rangle$ : предсказание теории (1.12) с учетом  $|\lambda_{\min}| = 1$ .

Как было показано выше, для схемы с одним квадратичным инвариантом — энергией (E) возможна неограниченная генерация энтропии, и это происходит в численном эксперименте: в ходе наступления статистического равновесия уровень энтропии увеличивается в 6000 раз, см. рисунок 1.2b. Избыточная энтропия скапливается в мелких масштабах, и это приводит к тому, что энергия каскадирует в область высоких волновых чисел, где наблюдается равномерное распределение энергии по фурье-гармоникам (после интегрирования по углу в фурье-пространстве,  $E(k) \sim k$ ), см. рисунок 1.2c. Как следствие, когерентные структуры на крупных масштабах не образуются, см. рисунки 1.5, 1.6. В результате генерации энтропии, дисперсия распределения по площадям  $\rho(\omega)$  значительно увеличивается по сравнению со схемами ZE и Z, см. рисунок 1.3, при этом функциональный вид распределения не меняется: оно остается гауссовым.

### 1.3 Крупномасштабная структура и распределение завихренности по площадям в двумерных уравнениях с диссипацией и форсингом

Рассмотрим двумерные уравнения вязкой жидкости в двоякопериодическом канале:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = f - \alpha \omega + \mu \Delta \omega, \quad (1.23)$$

$$\omega|_{t=0} = \omega^0,$$

где  $\omega = \Delta\psi$ ,  $f$  – внешний форсинг,  $\alpha$  – коэффициент рэлеевского трения,  $\mu$  – коэффициент вязкости. Асимптотические свойства этого уравнения рассмотрены в многочисленных работах (см. [98] и приведенные там ссылки). Пусть

$$\frac{\partial \omega_h}{\partial t} + J^h(\psi_h, \omega_h) = f_h - \alpha \omega_h + \mu \Delta_h \omega_h, \quad (1.24)$$

$$\omega_h|_{t=0} = \omega_h^0$$

– некоторая конечно-разностная аппроксимация (1.23), в которой система (1.24) при  $f = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\mu = 0$  есть система гидродинамического типа. Центральный вопрос, который будем рассматривать в этом разделе, заключается в следующем: в каком смысле асимптотические (статистические) свойства (1.24) будут определяться асимптотическими (статистическими) свойствами соответствующей системы гидродинамического типа?

Уравнения для энергии и энстрофии в системе (1.23) имеют вид:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -(f, \psi) - 2\alpha E - 2\mu Z \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = (f, \omega) - 2\alpha Z + \mu(\Delta \omega, \omega). \quad (1.26)$$

Усредняя (1.25) и (1.26) по времени, получим средние значения энергии  $\langle E \rangle$  и энстрофии  $\langle Z \rangle$ :

$$\langle E \rangle = \frac{-\langle (f, \psi) \rangle - 2\mu \langle Z \rangle}{2\alpha} \quad (1.27)$$

$$\langle Z \rangle = \frac{\langle (f, \omega) \rangle + \mu \langle (\Delta \omega, \omega) \rangle}{2\alpha}. \quad (1.28)$$

Соотношения (1.27), (1.28) выражают принципиальное различие систем (1.3) и (1.23): в первом случае  $\langle E \rangle$  и  $\langle Z \rangle$  определяются начальными данными, во втором они от начальных данных (в асимптотике) не зависят. При решении уравнений (1.23) полезным оказывается использование схем, которые не допускают роста энстрофии. Согласно соотношению (1.27), увеличение уровня энстрофии приводит к уменьшению уровня энергии и, как следствие, росту среднего квадрата волнового числа. Этот эффект будет продемонстрирован в следующей главе диссертации 2, где подробно изучено распределение энергии по спектру для различных схем решения уравнений (1.23).

Как и в случае идеальной жидкости, нас будут интересовать такие характеристики системы (1.23), как крупномасштабные когерентные структуры

и распределение завихренности по площадям. Пусть форсинг задан на таких пространственных масштабах, что возможно образование двух инерционных интервалов, связанных с каскадами энергии и энстрофии [18]. В этих интервалах, по определению, диссипация не должна существенно влиять на формирование распределения энергии по масштабам, т.е. жидкость должна вести себя как идеальная. Этого можно добиться, если выбрать масштаб диссипации за счет вязкости много меньше масштаба форсинга, а временной масштаб рэлеевского трения много больше временного масштаба передачи энергии по спектру. Оба условия выполняются при достаточно малых коэффициентах  $\mu$  и  $\alpha$ . В работе [1] было показано, что при достаточно малых  $\mu$  квазиравновесные состояния вязкой жидкости близки к соответствующим состояниям идеальной жидкости.

Было проведено два численных эксперимента для задачи (1.23), решаемой по схеме Аракавы ZE, при следующих параметрах (все параметры безразмерны): размер области  $D = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ ,  $\mu = 4.69 \cdot 10^{-6}$ , время счета  $t = 15000$ , разрешение расчетной сетки  $1024 \times 1024$ . Случайный  $\delta$ -коррелированный форсинг задается на волновом числе 45 и обеспечивает приток энергии на единицу поверхности в единицу времени  $\varepsilon = 1.534 \cdot 10^{-4}$ . Алгоритм построения внешнего воздействия приведен в приложении А. Отличие между двумя экспериментами состоит в разном масштабе блокировки обратного каскада энергии, определяемого коэффициентом рэлеевского трения:  $\alpha = 0.012$  и  $\alpha = 0.0003$ .

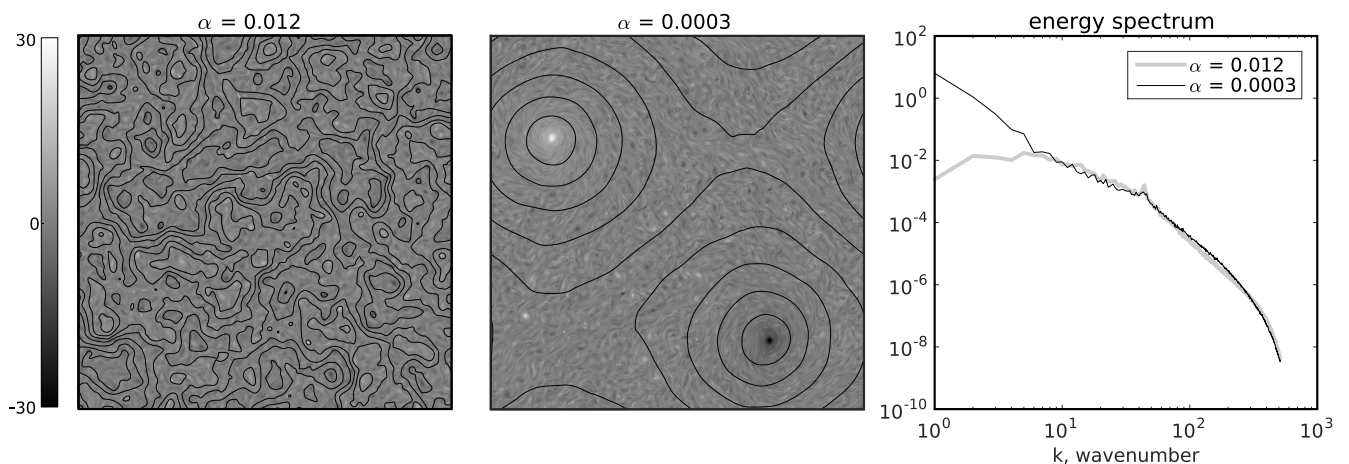


Рисунок 1.7 — Завихренность (обозначена цветом) и функция тока (изображена линиями) – слева, спектр энергии – справа. Рисунки соответствуют конечному моменту времени  $t = 15000$ .

На рисунке 1.7 приведено распределение энергии по спектру в двух экспериментах. Из рисунка видно, что в случае большого рэлеевского трения

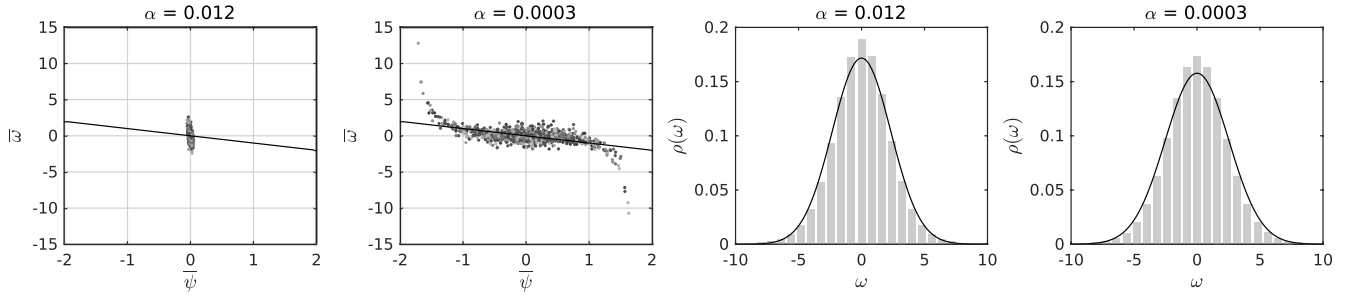


Рисунок 1.8 — Слева – точечная диаграмма  $\bar{\psi} - \bar{\omega}$ , где верхней чертой обозначено осреднение по ячейкам из  $32 \times 32$  расчетных точек. Черная линия соответствует линейному соотношению (1.12). Справа – распределение завихренности по площадям, 25 интервалов гистограммы, черная кривая соответствует гауссовому распределению с эквивалентной дисперсией.

Рисунки соответствуют конечному моменту времени  $t = 15000$ .

$\alpha = 0.012$  каскад энергии в области низких волновых чисел блокируется приблизительно на волновом числе  $k = 5$ , при этом квазистационарной когерентной структуры не наблюдается. При малом коэффициенте  $\alpha = 0.0003$  уже образовались когерентные структуры, близкие к тем, что наблюдаются в идеальной жидкости, сравнить рисунки 1.7 и 1.5. Точечная диаграмма  $\bar{\psi} - \bar{\omega}$  приведена на рисунке 1.8. Как и в идеальной жидкости, при малом рэлеевском трении наблюдается функциональная зависимость  $\bar{\omega} = F(\bar{\psi})$ , которая близка к линейной (1.12) при малых  $\bar{\psi}$ . В обоих случаях распределение завихренности по площадям близко к гауссовому, см. рисунок 1.8. Стоит отметить, что распределения завихренности по площадям, близкие к гауссовому, наблюдались и при вычислениях по реальным данным в атмосфере (500 мб. поверхность) [100].

## 1.4 Выводы

В данной главе мы исследовали статистические свойства трех разностных схем, аппроксимирующих уравнения двумерной идеальной несжимаемой жидкости и принадлежащих к классу систем гидродинамического типа, введенному А.М. Обуховым. Было показано, что даже при наличии теоремы сходимости на конечном промежутке времени для одной из разностных схем (схемы Аракавы, имеющей два квадратичных инварианта – энергию и энстрофию), при рассмотрении произвольно большого промежутка времени схемы в принципе не могут воспроизводить некоторые свойства идеальной двумерной жидкости, в частности сохранение распределения завихренности по площадям, для воспроизведения которого требуется наличие бесконечного количества инвариантов (казимиров). При этом интервал времени, на котором имеет место приближенное сохранение начального распределения завихренности по площадям, увеличивается медленно при повышении разрешения, что тем не менее согласуется с теоремой сходимости.

Схема, сохраняющая только энергию, не воспроизводит и другие важнейшие свойства идеальной жидкости: формирование стационарного квазиравновесного состояния, удовлетворяющего линейному соотношению между завихренностью и функцией тока при проведении определенной процедуры осреднения (например, рассмотрение сходимости по Чезаро), и распределение энергии по спектру. Что касается схемы, сохраняющей только один квадратичный инвариант – энстрофию, то результаты моделирования с ее помощью квазиравновесных состояний идеальной жидкости мало отличаются от результатов, полученных с помощью схемы Аракавы, что объясняется наличием теоремы вложения, запрещающей каскад энергии в сторону высоких волновых чисел.

Возникает вопрос: необходимо ли учитывать воспроизведение фундаментальных свойств идеальной двумерной жидкости при моделировании вязкой квазидвумерной жидкости с внешним форсингом? В случае вязкой жидкости имеются глобальная теорема разрешимости и теоремы сходимости решений разностных схем к решению дифференциальных задач, у которых при коэффициенте вязкости и форсинга, стремящихся к нулю, существует только один квадратичный инвариант – энергия ("плохая" схема с точки зрения воспроизведе-

дения статистических свойств идеальной жидкости). Однако следует заметить, что константы во всех этих теоремах (если они определены), как правило, экспоненциально зависят от промежутка времени, и, таким образом, теоремы практически нам не могут помочь в исследовании вышеуказанной проблемы. В данной главе мы показали, что при малых коэффициентах рэлеевского трения, т.е. в том случае, когда отсутствует диссипация и генерация энергии на большой области волновых чисел, связанной с инерционным интервалом обратного каскада энергии, в вязкой вынужденной турбулентности проявляются следующие свойства систем гидродинамического типа: формируются квазистационарные когерентные структуры, а также наблюдается гауссово распределение завихренности по площадям. В данной главе отличия между схемами не обнаружены в задаче моделирования вынужденной турбулентности. Как показано в следующей главе, отличия начинают проявляться при более грубых пространственных разрешениях расчетной сетки.

## Глава 2. Исследование влияния численных схем адвекции на воспроизведение обратного каскада энергии

В предыдущей главе показано, что статистически-равновесные состояния, возникающие в системах, аппроксимирующих уравнения идеальной жидкости, могут сильно зависеть от выбора аппроксимации адвективного слагаемого. Кроме того, некоторые свойства идеальной жидкости, такие как формирование квазистационарных крупномасштабных когерентных структур и гауссово распределение завихренности по площадям, могут наблюдаться и в более реалистичной задаче – вынужденной турбулентности. В данной главе предлагается выяснить, как выбор численной схемы адвекции влияет на воспроизведение обратного каскада энергии при различном соотношении между масштабом внешнего воздействия и шагом расчетной сетки. В идеальной жидкости схема с одним инвариантом (энергией) практически неограниченно генерирует энтрофию. Этот эффект препятствует распространению энергии в крупные масштабы и, как следствие, образованию крупномасштабной когерентной структуры. В вынужденной турбулентности генерация энтрофии подавляется вязкостью, которая ограничивает схемные ошибки в коротковолновом диапазоне, тем не менее, как показано в данной главе, воспроизведение обратного каскада энергии может значительно зависеть от используемой численной схемы адвекции в том случае, когда масштаб внешнего воздействия выбран близким к шагу расчетной сетки. Изучение задачи с мелкомасштабным внешним воздействием абсолютно оправдано с практической точки зрения: генерация мезомасштабных вихрей в океане происходит на масштабе внутреннего радиуса деформации Россби, который плохо разрешается на вычислительной сетке вихредопускающих моделей, и ослабление обратного каскада энергии рассматривается как одна из возможных причин нарушения динамики моделей океана с грубым пространственным разрешением [107].



## 2.1 Уравнения и параметры модели

Рассматривается динамика двумерной несжимаемой жидкости на квадрате  $(x_1, x_2) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$  с периодическими граничными условиями в декартовых координатах. Рассмотрены численные схемы как в переменных скорость – давление, так и в переменных завихренность – функция тока.

В естественных переменных скорость – давление  $(\mathbf{u}, p)$  уравнения движения записываются в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p - \nu \Delta^2 \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} + \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (2.1a) \quad (2.1b)$$

Здесь  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  – скорость,  $p$  – давление,  $\mathbf{f}$  – форсинг (внешняя сила, воздействующая на течение) описан в приложении **A**,  $\alpha > 0$  – коэффициент рэлеевского трения. В качестве базовой модели описания подсеточной турбулентности выбран бигармонический оператор с коэффициентом  $\nu > 0$ . Этот выбор соответствует общей практике подавления численных шумов в моделях динамики атмосферы и океана, где часто используются диссипативные слагаемые, воздействующие преимущественно на коротковолновую часть спектра.

В переменных функция тока – завихренность  $(\psi, \omega)$  имеем следующую форму записи уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = -\nu \Delta^2 \omega - \alpha \omega + f \\ \Delta \psi = \omega, \end{cases} \quad (2.2a) \quad (2.2b)$$

где  $\omega$  – завихренность,  $\psi$  – функция тока,  $f$  – форсинг (внешнее воздействие на завихренность). Переменные в уравнениях (2.1) и (2.2) связаны между собой соотношениями

$$\mathbf{u} = \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) \quad (2.3)$$

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \quad (2.4)$$

При аппроксимации уравнений (2.1), (2.2) выбрана равномерная по пространству сетка с шагами  $(h_{x_1}, h_{x_2})$  и шагом по времени  $\Delta t$ , а также введены разностные операторы

$$\delta_{x_i} \varphi = \frac{\varphi(x_i + h_{x_i}/2) - \varphi(x_i - h_{x_i}/2)}{h_{x_i}} \quad (2.5)$$

$$\bar{\varphi}^{x_i} = \frac{\varphi(x_i + h_{x_i}/2) + \varphi(x_i - h_{x_i}/2)}{2} \quad (2.6)$$

$$\nabla_h \cdot \mathbf{u} = \delta_{x_i} u_i \quad (2.7)$$

$$\Delta_h \varphi = \nabla_h^2 \varphi = \delta_{x_i} (\delta_{x_i} \varphi), \quad (2.8)$$

здесь и далее предполагается суммирование по повторяющемуся индексу.

## 2.2 Численные методы

### 2.2.1 Конечно-разностные схемы в переменных $(\mathbf{u}, p)$

Система уравнений (2.1) решается проекционным методом [108]. Промежуточное значение скорости  $\mathbf{u}'$  находится по следующей схеме:

$$\frac{\mathbf{u}' - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]_h^{n+1/2} - \nabla_h p^n - \nu \Delta_h^2 \mathbf{u}^{n+1/2} - \alpha \mathbf{u}^{n+1/2} + \mathbf{f}^n.$$

Дискретизация по пространству адвективного слагаемого  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  обозначается индексом  $h$  и меняется от одной схемы к другой. Значения на  $n + 1/2$  слое по времени  $[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]_h^{n+1/2}$ ,  $\nu \Delta_h^2 \mathbf{u}^{n+1/2}$ ,  $\alpha \mathbf{u}^{n+1/2}$  вычисляются с помощью схемы Адамса-Бэшфорта второго порядка. Для некоторой правой части  $g$ :

$$g^{n+1/2} = \frac{3}{2} g^n - \frac{1}{2} g^{n-1}.$$

Далее ищется поправка к давлению  $\varphi^{n+1}$  из условия

$$\Delta_h \varphi^{n+1} = \frac{\nabla_h \cdot \mathbf{u}'}{\Delta t}$$

и осуществляется шаг проекции

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}' - \Delta t \nabla_h \varphi^{n+1} \\ p^{n+1} &= p^n + \varphi^{n+1}. \end{aligned}$$

### *Схема, используемая в модели океана INMOM*

В модели INMOM [109] аппроксимация адвекции  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  производится с применением центральных разностей второго порядка на разнесенной сетке  $C$  (в терминологии Аракавы). Схема сохраняет энергию и, при условии выполнения дискретного аналога уравнения неразрывности  $\nabla_h \cdot \mathbf{u} = 0$ , может быть записана в простом виде [110]:

$$[(\mathbf{u} \cdot \nabla)u_i]_h = \delta_{x_j}(\overline{u_j^{x_i}} \overline{u_i^{x_j}}).$$

### *Схема, используемая в модели атмосферы INMCM*

В модели атмосферы, которая является частью модели климата INMCM [111], используется одна из схем Аракавы [112]. На сфере она сохраняет угловой момент. Ее можно получить, если рассмотреть помимо обычной системы координат  $(x_1, x_2)$  дополнительную  $(x'_1, x'_2)$ , которая на квадратной сетке получается поворотом на 45 градусов против часовой стрелки. Схема имеет вид линейной комбинации слагаемых  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ , записанных в двух системах координат:

$$[(\mathbf{u} \cdot \nabla)u_i]_h = \frac{2}{3} \cdot \overline{u_j^{x_i}} \delta_{x_j} u_i^{x_j} + \frac{1}{3} \cdot \overline{u'_j} \delta_{x'_j} u_i^{x'_j}, \quad (2.9)$$

где  $(u'_1, u'_2)$  – скорость в новой системе координат  $(x'_1, x'_2)$ .

## 2.2.2 Конечно-разностные схемы в переменных $(\psi, \omega)$

Система уравнений (2.2) решается в два этапа. На первом этапе с помощью схемы Адамса-Бэшфорта второго порядка решается эволюционное уравнение (2.2a), результатом которого является завихренность на новом шаге  $\omega^{n+1}$ . На втором этапе восстанавливается функция тока  $\psi^{n+1}$  по завихренности  $\omega^{n+1}$  согласно уравнению Пуассона (2.2б), с использованием дискретного оператора Лапласа (2.8).

**Схемы Аракавы** Используются аппроксимации E, Z, ZE, описанные в разделе 1.1.

### 2.2.3 Полулагранжевы методы в переменных $(\psi, \omega)$

Система уравнений (2.2) решается в два этапа аналогично тому, как описано в предыдущем разделе 2.2.2, однако за восстановлением функции тока  $\psi^{n+1}$  следует нахождение скорости  $\mathbf{u}^{n+1}$ . Для обновления завихренности на новом временном слое  $\omega^{n+1}$  используется полулагранжев метод, который имеет вид

$$\frac{\omega_A^{n+1} - \omega_D^n}{\Delta t} = F(\omega^n)_A,$$

здесь  $A$  – конечные точки траектории, расположенные в узлах сетки, а  $D$  – начальные. Адвекция описывается левой частью уравнения, а правая часть  $F(\omega)$  отвечает за диссипацию и внешнее воздействие, которые не требуют высокой точности и потому аппроксимируются с первым порядком точности по времени. Значение  $\omega_D^n$  находится с помощью интерполирования, а схемы между собой отличаются только видом интерполянта. Поиск траекторий производится по схеме SETTLS [113], используемой в модели ПЛАВ [114]. Для уравнения характеристик

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}$$

она имеет вид

$$\frac{\mathbf{x}_A^{n+1} - \mathbf{x}_D^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}([2\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}]_D + \mathbf{u}_A^n). \quad (2.10)$$

Схема является неявной относительно точки  $D$  и решается итеративно за 5 итераций с применением кубической интерполяции скорости в точке  $D$ .

#### *Виды интерполяции*

Будем различать полулагранжевы методы только по типу одномерной интерполяции. Существует много способов разбить двумерную задачу интерполяции на последовательность одномерных [115; 116]. Среди множества методов мы выбрали каскадный подход [116], поскольку он используется в новой версии модели ПЛАВ [117]. Кроме каскадного подхода опробован также метод тензорного произведения [115], и в наших экспериментах различия не обнаружены.

Исследованы следующие типы одномерной интерполяции:

**cubic** – кубическая интерполяция [118]

**hermite** – эрмитова интерполяция. Удовлетворяет необходимым и достаточным условиям монотонности [115] (под монотонностью понимается монотонность интерполянта на шаге сетки). В качестве условий монотонности взяты критерии NCM1 и SCM из работы [115]. Для того, чтобы построить интерполянт на отрезке, нужно знать значения функции и ее производной на краях отрезка. Значения функции известны, а значения производной находятся с помощью кубического интерполянта (см. [115], "cubic derivative estimate"). Далее, значения производной проверяются на монотонность. Если условия монотонности верны, то интерполяция остается кубической, иначе следует коррекция.

**CCS** – каскадная конечно-объемная полулагранжева схема [119]. В этой схеме производится последовательность одномерных перераспределений массы, заключенной в вычислительную ячейку. В нашем случае под массой понимается интеграл завихренности по ячейке. Перераспределение массы для одномерного закона сохранения вида

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega u}{\partial x} = 0$$

выражается следующим образом:

$$\int_{V(t^{n+1})} \omega dx = \int_{V(t^n)} \omega dx, \quad (2.11)$$

здесь  $V(t)$  – это движущийся вместе с жидкостью объем, который в момент времени  $n + 1$  совпадает с вычислительной ячейкой. Интеграл в правой части формулы (2.11) находится приближенно с применением консервативной кусочно-параболической интерполяции.

В модели ПЛАВ реализованы все описанные интерполянты, однако в оперативной версии модели используются только два: cubic – в динамическом ядре и CCS – для переноса примесей [117].

## 2.2.4 Полулагранжевы методы в переменных $(\mathbf{u}, p)$

Система уравнений (2.1) решается проекционным методом аналогично тому, как описано в главе 2.2.1 с использованием полулагранжевых методов,

описанных в главе 2.2.3, однако учет давления отличается и имеет вид схемы Кранка-Николсон [120]

$$\frac{\mathbf{u}_A^{n+1} - \mathbf{u}_D^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2}(\nabla_h p_A^{n+1} + \nabla_h p_D^n) + F(\mathbf{u}^n)_A.$$

### 2.3 Численные эксперименты

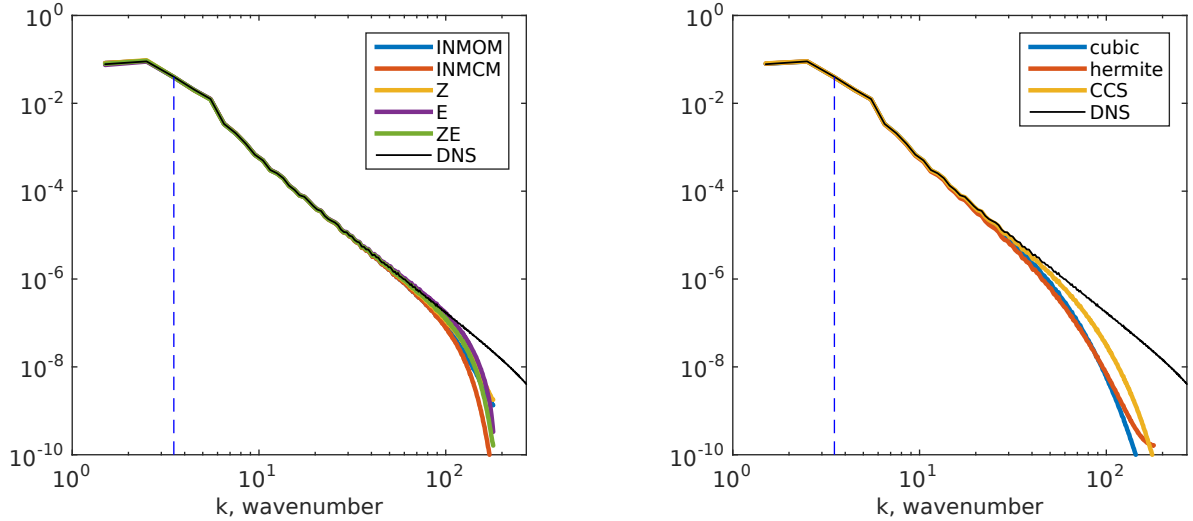
Уравнения (2.1), (2.2) решаются до момента наступления статистического равновесия ( $t = 100$ , приблизительно 4000 шагов по времени для полулагранжевых схем). Затем производится расчет еще на 500 единиц времени для получения осредненных характеристик решения. Во всех экспериментах форсинг обеспечивает приток энергии на единицу поверхности в единицу времени  $\varepsilon = 1.534 \cdot 10^{-4}$ . Коэффициент рэлеевского трения равен  $\alpha = 0.012$ . Наш анализ исключает рассмотрение ошибок интегрирования адвекции по времени, поэтому мы используем малые шаги по времени для конечно-разностных схем: число Куранта  $\frac{u_{max}\Delta t}{h} < 0.15$ . У полулагранжевых схем число Куранта выбрано равным 1, поскольку, как правило, полулагранжевы методы не используются при низком числе Куранта.

Результаты расчетов при низком пространственном разрешении (грубые модели) сравниваются с моделью высокого разрешения DNS, которая считается по схеме ZE на подробной сетке  $2016 \times 2016$  (коэффициент вязкости был подобран так, чтобы получить максимально протяженный энстрофийный интервал). Коэффициент вязкости в грубых моделях зависит от масштаба форсинга и разрешения, и будет приведен в каждом случае отдельно. Уровень энергии в идеальной модели (энергия не диссипируется при использовании бигармонической вязкости) можно получить, приравняв приток энергии от форсинга  $\varepsilon$  и диссипацию на рэлеевском трении  $2\alpha E$ :

$$E = \frac{\varepsilon}{2\alpha}. \quad (2.12)$$

### 2.3.1 Крупномасштабный форсинг

Задача решается при разрешении  $360 \times 360$  узлов. Внешнее воздействие задано в крупных масштабах, при волновом числе  $k_f = 4$ . Коэффициент бигармонической вязкости  $\nu = 1.06 \cdot 10^{-9}$ .



а) конечно-разностные схемы

б) полулагранжевы схемы,  $(\psi, \omega)$

Рисунок 2.1 — Спектр энергии в эксперименте с крупномасштабным форсингом, пунктиром отмечен масштаб форсинга, разрешение  $360^2$ .

На рисунке 2.1 представлено спектральное распределение энергии для исследуемых схем (полулагранжевы методы только в переменных  $(\psi, \omega)$ ). Крупномасштабная часть спектра одинакова для всех численных дискретизаций адвекции и совпадает с расчетом при высоком разрешении DNS. Уровень энергии отличается от схемы к схеме не более чем на 1% и согласуется с теоретической оценкой (2.12). Внешнее воздействие отделено по масштабу от масштаба сетки, и энергия практически не диссипируется вязкостью. Схемные ошибки несохранения энергии также незначительны. Отличия наблюдаются в мелких масштабах (область высоких волновых чисел), где наиболее сильно проявляются схемные эффекты. Полулагранжевы схемы уступают конечно-разностным по величине диссипации. По этой причине спектр энергии у полулагранжевых схем занижен вплоть до средних масштабов (12 шагов сетки), а у конечно-разностных вплоть до 6 шагов сетки. Можно заключить, что если форсинг имеет достаточно крупный масштаб, то нелинейный характер ошибок аппроксимации не способен изменить крупномасштабную динамику.

### 2.3.2 Мелкомасштабный форсинг

Внешнее возмущение расположено в мелких масштабах  $k_f = 90$ . Задача решается при разрешениях  $540 \times 540$  (форсинг соответствует волнам длиной 6 шагов сетки,  $\nu = 4.21 \cdot 10^{-10}$ ) и  $360 \times 360$  (форсинг соответствует волнам длиной 4 шага сетки,  $\nu = 2.13 \cdot 10^{-9}$ ).

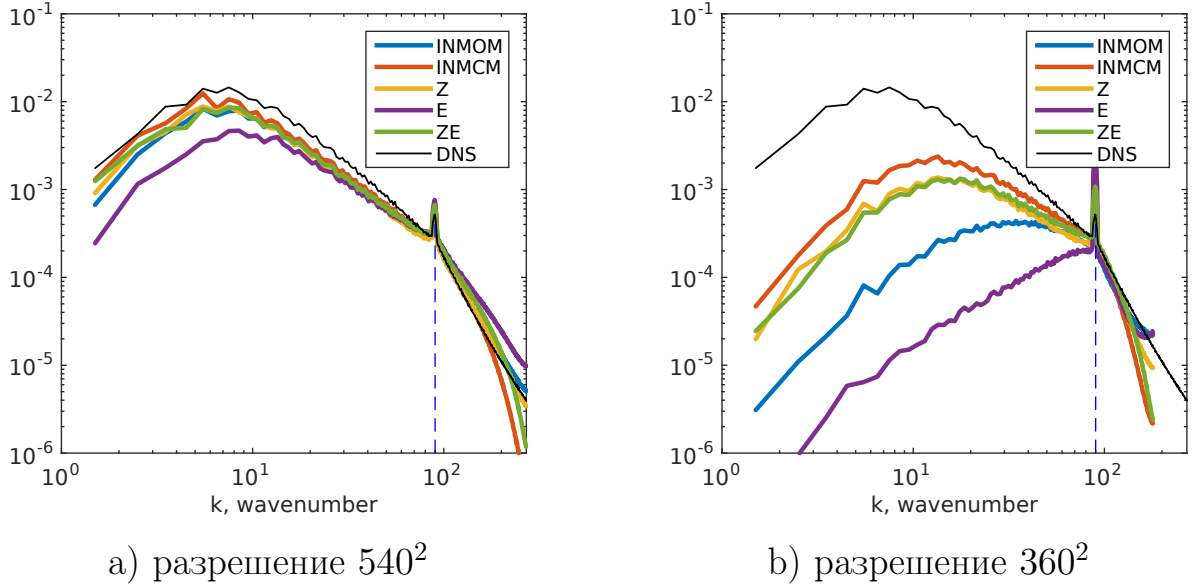


Рисунок 2.2 — Спектр энергии для конечно-разностных схем в эксперименте с мелкомасштабным форсингом, пунктиром отмечен масштаб форсинга.

### Конечно-разностные схемы

Спектральное распределение энергии для конечно-разностных схем приведено на рисунке 2.2, где проиллюстрирован процесс нарушения обратного каскада энергии при огрублении разрешения. Как видно из рисунка 2.2(b), практически все конечно-разностные схемы, вне зависимости от переменных  $(\mathbf{u}, p)$  или  $(\psi, \omega)$ , имеют схожий вид спектра в крупных масштабах, за исключением двух схем E и INMOM, сохраняющих только энергию. Эти схемы имеют заметно более низкий уровень энергии при разрешении  $360 \times 360$ , поскольку генерируют энтрофию в мелких масштабах (см. таблицу 1), где она диссипируется численным фильтром, что влечет за собой и понижение уровня энергии. Этот



эффект уже обсуждался при рассмотрении соотношения (1.27) в предыдущей главе диссертации.

Схема INMCM имеет самый высокий уровень энергии, и он даже выше, чем у схемы с двумя квадратичными инвариантами ZE, см. таблицу 1. Это происходит по двум причинам. Во-первых, она является практически консервативной по энергии. Во-вторых, схема диссипирует энтрофию. Сочетание двух этих свойств означает, что схема уменьшает средний квадрат волнового числа, т.е. "моделирует" обратное перераспределение кинетической энергии (ОПКЭ). Подробный анализ ОПКЭ приведен в следующей главе диссертации 3.

Таблица 1 — Уровень энергии ( $E$ ) и энтрофии ( $Z$ ), а также их притоки  $\partial E/\partial t$ ,  $\partial Z/\partial t$  соответственно.  $E, Z$  отнормированы на значения в DNS. Притоки – на  $\varepsilon$  и  $k_f^2 \varepsilon$ . Конечно-разностные схемы,  $540 \times 540$ , мелкомасштабный форсинг.

схема	$E$	$\partial E/\partial t$			$Z$	$\partial Z/\partial t$		
		схема	вязкость	трение		схема	вязкость	трение
INMOM	64%	0%	-38%	-62%	71%	23%	-110%	-13%
INMCM	75%	-0,33%	-27%	-72%	67%	-32%	-55%	-12%
Z	64%	-5%	-34%	-62%	66%	0%	-84%	-12%
E	49%	0%	-53%	-47%	86%	61%	-145%	-16%
ZE	66%	0%	-37%	-63%	75%	0%	-87%	-14%
DNS	100%	0%	-4%	-96%	100%	0%	-83%	-17%

## Полулагранжевы методы

На рисунке 2.3 приведены спектры энергии для полулагранжевых методов. В переменных  $(\mathbf{u}, p)$  эти методы дают схожие результаты с конечно-разностными схемами. Отличие заключается в дополнительной диссипации, которая минимальна для схемы hermite, см. рисунок 2.3(b).

Большинство полулагранжевых методов не сохраняют первый момент. В случае переменных  $(\mathbf{u}, p)$  это означает нарушение закона сохранения интегрального импульса, а в случае переменных  $(\psi, \omega)$  – нарушение закона сохранения интегральной завихренности. Среди всех схем, представленных в работе, только

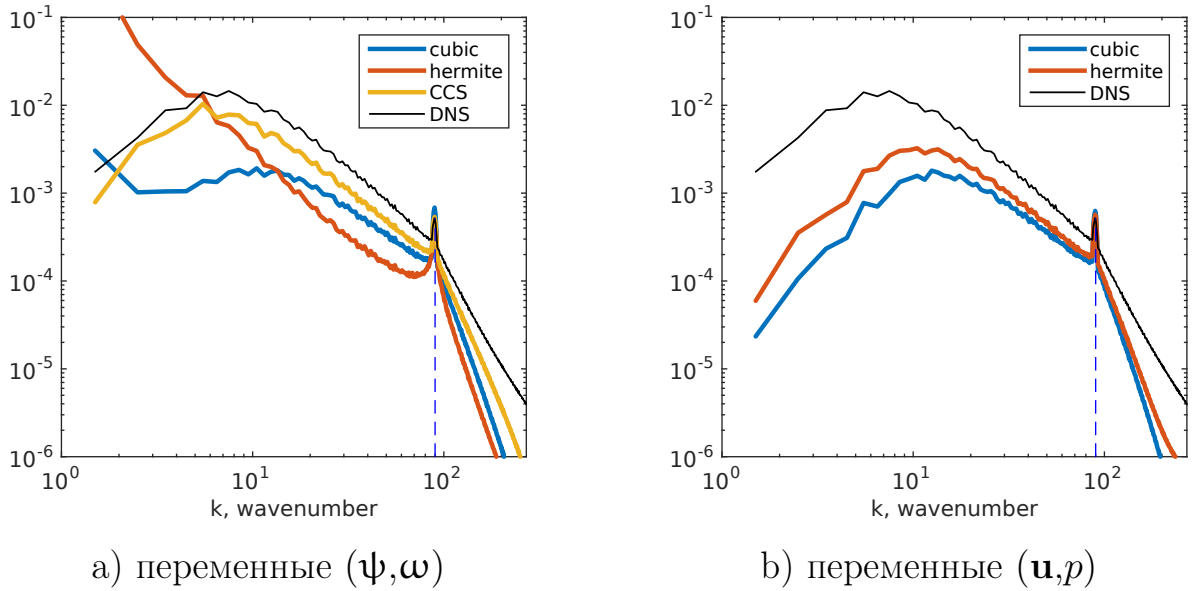


Рисунок 2.3 — Спектр энергии для полулагранжевых схем в эксперименте с мелкомасштабным форсингом, пунктиром отмечен масштаб форсинга, разрешение  $540^2$ .

схемы `cubic` и `hermite` не сохраняют интеграл переносимой величины. Среди полулагранжевых методов в переменных  $(\psi, \omega)$  только консервативная схема `CCS` дает правильную асимптотику спектра в крупных масштабах, см. рисунок 2.3(а). Схемы `cubic` и `hermite` имеют особенность при волновом числе  $k = 0$ : энергия скапливается в крупных масштабах. Передача энергии в крупные масштабы оказывается нелокальной в фурье-пространстве и происходит сразу после запуска численного эксперимента, в отличие от консервативных схем. Генерация энергии в крупных масштабах может приводить к серьезным нарушениям энергетического баланса в системе (см. таблицу 2, `hermite`), которые остаются при увеличении разрешения в два раза (рисунок не приведен). Мы связываем генерацию энергии в крупных масштабах с величиной несохранения интегральной завихренности: в работе [121] показано, что схема `hermite` обладает значительным несохранением интеграла переносимой величины. Для проверки нашей гипотезы были проведены эксперименты со схемами `urwind` 2 и 3 порядков, которые показали, что несохранение интегральной завихренности приводит к особенностям в крупных масштабах (рисунок не приведен).

Таблица 2 — Уровень энергии ( $E$ ) и энстрофии ( $Z$ ), а также их притоки  $\partial E/\partial t$ ,  $\partial Z/\partial t$  соответственно.  $E, Z$  отнормированы на значения в DNS. Притоки — на  $\varepsilon$  и  $k_f^2\varepsilon$ . Полулагранжевы методы,  $540 \times 540$ , мелкомасштабный форсинг.

схема	$E$	$\partial E/\partial t$			$Z$	$\partial Z/\partial t$		
		схема	вязкость	трение		схема	вязкость	трение
переменные завихренность–функция тока								
cubic	26%	-64%	-11%	-25%	32%	-77%	-17%	-6%
hermite	211%	110%	-7%	-203%	21%	-85%	-11%	-4%
CCS	59%	-27%	-17%	-57%	46%	-59%	-33%	-8%
переменные скорость–давление								
cubic	23%	-68%	-10%	-22%	32%	-80%	-14%	-5%
hermite	35%	-53%	-13%	-34%	39%	-69%	-23%	-7%
DNS	100%	0%	-4%	-96%	100%	0%	-83%	-17%

## 2.4 Выводы

В задаче вынужденной двумерной турбулентности качество воспроизведения крупномасштабных течений зависит от соотношения между пространственным масштабом внешнего воздействия и шагом расчетной сетки. В экспериментах с крупномасштабным форсингом влияние схемных ошибок на статистические характеристики крупных масштабов незначительно. В случае мелкомасштабного форсинга все рассмотренные схемы воспроизводят обратный каскад энергии неверно. Воспроизведение инерционного интервала обратного каскада энергии наиболее чувствительно к таким характеристикам численных схем адвекции, как законы сохранения двух наиболее известных казимиров: интегральная завихренность и энтрофия:

- Отсутствие консервативности интегральной завихренности приводит к генерации энергии за счет схемных ошибок на самом крупном масштабе – масштабе расчетной области. Поскольку схемные ошибки связаны с неверным описанием мелкомасштабного вихревого поля, они приводят к появлению сильно нелокальных в Фурье-пространстве взаимодействий мелкомасштабных и крупномасштабных компонент течения, которые отсутствуют в исходных уравнениях.
- Генерация энтрофии (для схем с одним инвариантом – энергией) создает дополнительную нагрузку на численный фильтр (бигармоническая вязкость), в результате чего происходит избыточная диссипация энергии. Преимуществом обладает схема INMCM, которая проявляет избирательные свойства к диссипации инвариантов: диссипирует энтрофию, но приближенно сохраняет энергию.

### Глава 3. Исследование влияния подсеточных параметризаций на воспроизведение обратного каскада энергии

В предыдущей главе диссертации показано, что в вынужденной двумерной турбулентности обратный каскад энергии ослабляется при выборе масштаба внешнего воздействия в коротковолновом диапазоне. Известно, что обратный каскад энергии поддерживается за счет сильно нелокальных триадных взаимодействий, в которых течения, сопоставимые по масштабу с масштабом форсинга, передают энергию непосредственно в крупные масштабы, соответствующие инерционному интервалу обратного каскада энергии [29]. В приведенной работе описанный физический процесс называется "backscatter". Мы будем пользоваться определением "обратное перераспределение кинетической энергии" (ОПКЭ), либо "kinetic energy backscatter" (КЕВ). Для явного воспроизведения ОПКЭ в численных экспериментах необходимо, чтобы масштаб форсинга хорошо разрешался на вычислительной сетке. В противном случае упомянутые триадные взаимодействия будут либо отсутствовать (недостаточное разрешение), либо ослаблены (аппроксимация адвекции низкого порядка).

В данной главе диссертации проведен анализ взаимодействия разрешаемых и неразрешаемых на вычислительной сетке грубой модели течений с учетом численной аппроксимации адвекции и построены спектральные характеристики энергетического вклада неразрешаемых течений. Анализ проведен на траектории модели высокого разрешения и носит название *априорного анализа*. Силы, с которыми неразрешаемые масштабы воздействуют на разрешаемые, называются *подсеточными силами*. Для моделирования энергетического эффекта подсеточных сил предложено несколько параметризаций ОПКЭ.

Определенный выше ОПКЭ – это физический процесс, который наблюдается в двумерной турбулентности, но отсутствует в трехмерной. Существование ОПКЭ следует из двух фундаментальных свойств двумерных жидкостей: энтропия должна перераспределяться в подсеточные масштабы, а обмен энергией с подсеточными масштабами практически отсутствует. Если обозначить плотность притока энергии от подсеточных сил при волновом числе  $k$  как  $S(k)$ , то упомянутые два свойства (в отсутствие источников энергии на подсеточных

масштабах) можно записать в следующем виде:

$$\int_0^{k_{max}} S(k)k^2 < 0, \quad (3.1)$$

$$\int_0^{k_{max}} S(k)dk = 0, \quad (3.2)$$

где  $k_{max}$  – максимальное разрешаемое волновое число в грубой модели. Из неравенства следует, что существуют волновые числа, для которых  $S(k) < 0$ . Тогда из равенства следует, что существуют волновые числа, для которых  $S(k) > 0$ . Как показано ниже, обычно наблюдаются два спектральных интервала: энергия диссипируется подсеточными силами вблизи сеточного масштаба и генерируется на инерционном интервале обратного каскада энергии.

Согласно работе [93], на основе характеристики  $S(k)$  можно построить параметризацию вихревой вязкости, в которой коэффициент вязкости зависит от волнового числа:

$$S(k) = -2\nu(k)k^2E(k). \quad (3.3)$$

В работе [93] показано, что в трехмерной турбулентности  $\nu(k) > 0, \forall k$ , а в двумерной турбулентности вихревая вязкость должна быть отрицательной в крупных масштабах,  $\nu(k) < 0$ . В работе [122] впервые предложено аппроксимировать  $\nu(k)$  в двумерной турбулентности с помощью комбинации двух операторов: оператора Лапласа с отрицательной вязкостью и бигармонического оператора. Коэффициенты вязкости при этих операторах выбирались таким образом, чтобы интегральный приток энтропии от полной подсеточной модели был нулевой (рассматривался случай, когда масштаб сетки принадлежит интервалу обратного каскада энергии). Аналогичная идея была предложена в работе [69], однако соотношение между коэффициентами вязкости выбиралось исходя из равенства нулю интегрального притока энергии от полной подсеточной модели (рассматривался случай, когда масштаб сетки принадлежит интервалу прямого каскада энтропии). Такой способ настройки ОПКЭ параметризации получил название "energetically consistent backscatter". Достаточно просто оценить энергетический эффект такой параметризации в зависимости от разрешения. Пусть поток энтропии по каскаду равен  $\eta$ . Тогда вместе с энтропией вязкость будет диссипировать и энергию, пропорционально  $\sim \eta/k_{max}^2$ . Т.е. энергетический эффект ОПКЭ параметризации будет падать квадратично с разрешением, аналогичные оценки даны в работах [69; 123].

Хотя ОПКЭ в том виде, как он описан выше, существует только в двумерной турбулентности, однако первые работы по построению параметризаций ОПКЭ были проведены в трехмерной турбулентности [41; 68; 71]. Обмен энергией с подсеточными масштабами разделяется на прямой и обратный с помощью EDQNM модели, причем обратному распространению энергии соответствует стохастическая параметризация, "stochastic backscatter". Стохастическое возвращение энергии происходит преимущественно в мелких масштабах, со спектральной плотностью  $k^4$  в случае трехмерной турбулентности и  $k^3$  – двумерной [70]. Стохастическая параметризация позволяет описать нарастание неопределенности, связанной с отсутствием информации о неразрешаемых масштабах. Такие параметризации могут использоваться для построения ансамблевых моделей прогноза погоды, см. [78]. Согласно классическим работам [41; 68; 71], при добавлении стохастического ОПКЭ необходимо увеличивать вихревую вязкость. В результате, по построению, такая параметризация не может перераспределять энергию по спектру волновых чисел. В работах [44; 124] показано, что в том случае, когда квазидвумерные течения являются достаточно хаотическими, то есть средние течения слабы, добавление параметризации "stochastic backscatter" в мелкие разрешаемые масштабы действительно не влияет на распределение энергии по масштабам. Тем не менее, в случае наличия значительных средних течений, стохастическая параметризация может способствовать росту неустойчивых флуктуаций [72] и ускорять достижение статистически-стационарного режима решения [74].

Таким образом, для воспроизведения двумерной турбулентности на грубой сетке возможно использование двух различных параметризаций ОПКЭ. Первая осуществляет перераспределение энергии по масштабам и участвует в поддержании обратного каскада энергии, ее будем называть *длинноволновой* ОПКЭ. Вторая учитывает неопределенность, связанную с отсутствием информации о неразрешаемых масштабах, ее будем называть *коротковолновой* ОПКЭ. В данной главе мы не будем рассматривать параметризации коротковолнового ОПКЭ, преимущественно воздействующие на масштабы в энстрофийном интервале. Предварительное тестирование таких подсеточных моделей показало (см. приложение Б), что они не оказывают существенного влияния на обратный каскад энергии. Данная глава посвящена построению параметризаций длинноволнового ОПКЭ. Показано, что в однородной изотропной турбулентности перераспределение энергии может быть осуществлено как

детерминистическим, так и стохастическим образом. Вопрос о выборе предпочтительной формы представления параметризации ОПКЭ должен решаться либо на основе анализа ансамбля решений, либо на основе анализа экспериментов, в которых наблюдаются сильные средние течения.

### 3.1 Априорный анализ подсеточных сил

Динамика двумерной жидкости описывается уравнениями, приведенными в предыдущей главе (2.1), (2.2). Рассматривается эксперимент с мелкомасштабным форсингом, описанный в разделе 2.3.2. Ниже дано определение подсеточных сил и изучены их спектральные свойства.

Следуя методу крупных вихрей (LES, [125]), выпишем соотношение между полями динамических переменных для грубой модели  $\omega^h$  и модели высокого разрешения  $\omega$ :

$$\omega^h \equiv \bar{\omega}, \quad (3.4)$$

где верхней чертой обозначен спектральный фильтр, в результате действия которого остаются ненулевыми фурье-гармоники грубой модели в области волновых чисел  $(-k_{max}, k_{max}]^2$ . С помощью дискретного преобразования Фурье функции  $\bar{\omega}$  могут быть взаимнооднозначно отображены на сетку грубой модели  $N \times N$ ,  $N = 2k_{max}$ . Далее будем предполагать, что на функции  $\bar{\omega}$  можно действовать как обычными дифференциальными операторами, так и дискретными операторами грубой модели, более подробно см. [31].

В априорных тестах среди всех правых частей уравнений (2.1) и (2.2) мы рассматриваем только процессы адвекции. Модель высокого разрешения описывается уравнением

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \dots - J(\psi, \omega), \quad (3.5)$$



а динамика крупных масштабов (разрешаемых на сетке грубой модели) подчиняется уравнению

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} = \dots - \overline{J(\psi, \omega)} = \dots - \underbrace{J^h(\bar{\psi}, \bar{\omega})}_{\text{схема}} + \sigma \quad (3.6)$$

$$\sigma = \underbrace{-\overline{J(\psi, \omega)} + J^h(\bar{\psi}, \bar{\omega})}_{\text{подсеточные силы}}, \quad (3.7)$$

где  $J^h$  обозначает численную дискретизацию в грубой модели. В переменных  $(\mathbf{u}, p)$  подсеточные силы можно найти аналогичным образом:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = \dots - \overline{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}} = \dots - [(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}]^h + \sigma \quad (3.8)$$

$$\sigma = -\overline{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}} + [(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}]^h. \quad (3.9)$$

Подсеточные силы учитывают неразрешенные на сетке масштабы и ошибки численных дискретизаций:

$$\sigma = \underbrace{-\overline{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}}_{\text{неразрешенные масштабы}} - \underbrace{-(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + [(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}]^h}_{\text{ошибки дискретизации}}. \quad (3.10)$$

Ошибки дискретизации отсутствуют в спектральной схеме, однако для конечно-разностных методов они могут определять вид подсеточных сил, см. подробнее [31].

### 3.1.1 Спектральные характеристики подсеточных сил

С тремя конечно-разностными схемами (INMCM, INMOM, Z) проведен априорный анализ на траектории DNS-расчета при высоком разрешении  $2160 \times 2160$  (коэффициент вязкости подобран так, чтобы получить максимально протяженный энстрофийный интервал). Разрешение грубой модели выбрано равным  $360 \times 360$ , масштаб форсинга  $k_f = 90$ . На рисунке 3.1(а) изображена спектральная плотность разрешаемой адвекции для грубых моделей  $\langle |(J^h(\bar{\psi}, \bar{\omega}))_k|^2 \rangle$  и DNS-расчета  $\langle |(\overline{J(\psi, \omega)})_k|^2 \rangle$ . Индекс  $k$  обозначает преобразование Фурье, угловые скобки – осреднение по времени. Из рисунка видно, что в крупных масштабах разрешаемая грубыми моделями адвекция воспроизводится верно,

а в мелких масштабах наблюдаются сильные отличия от DNS-расчета. Используя формулу для подсеточных сил,  $\sigma_k = -(\overline{J(\psi, \omega)})_k + (J^h(\overline{\psi}, \overline{\omega}))_k$ , получаем, что в крупных масштабах подсеточные силы малы по амплитуде, а в мелких масштабах преобладают над разрешаемой адвекцией. Аналогичные результаты приведены в работе [126]. Такое распределение подсеточных сил по масштабам объясняется тем, что максимальные ошибки аппроксимации адвективных членов приходятся на мелкие масштабы, где преобладают фазовые ошибки численных дискретизаций.

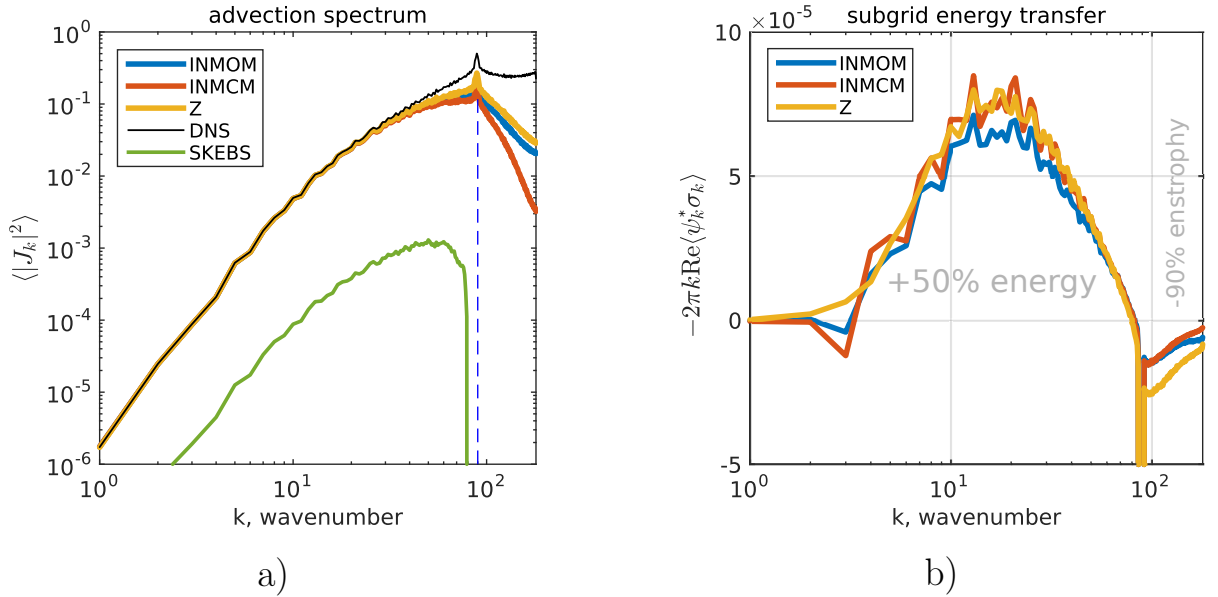


Рисунок 3.1 — Спектральное распределение разрешаемой адвекции (a) и спектральное распределение генерации энергии подсеточными силами (b) для трех схем (INMOM, INMCM, Z) в априорном тесте. Разрешение DNS  $2160^2$ , разрешение грубой модели  $360^2$ , пунктиром обозначен масштаб форсинга.

SKEBS – стохастическая параметризация. Серым обозначена суммарная генерация квадратичных инвариантов на прямом и обратном инерционных интервалах, отнормированная на приток от внешнего воздействия.

Хотя амплитуда адвекции в крупных масштабах воспроизводится всеми схемами верно, равновесная динамика моделей с низким пространственным разрешением может сильно отличаться от динамики DNS-модели. Это происходит по причине неверного описания энергетического вклада нелокальных триадных взаимодействий.

На рисунке 3.1(b) приведен спектр генерации энергии подсеточными силами  $-2\pi k \text{Re} \langle \overline{\psi}_k^* \sigma_k \rangle$ , \* обозначает комплексное сопряжение. Спектр генерации практически совпадает для трех исследуемых конечно-разностных схем второго порядка. Генерация и диссипация энергии подсеточными силами (а,

соответственно, и энстрофии, для которой спектр генерации отличается от приведенного домножением на квадрат волнового числа  $k^2$ ) разделены по пространственным масштабам. На масштабах прямого каскада энстрофии ( $k > 90$ ) наблюдается диссипация значительной части энстрофии (приблизительно 90% от ее притока за счет внешнего воздействия  $\eta$ ; оставшаяся часть диссипируется рэлеевским трением), а на масштабах обратного каскада энергии ( $k < 90$ ) наблюдается генерация энергии (50% от ее притока за счет внешнего воздействия  $\epsilon$ ). Неучтенная генерация энергии в длинноволновом диапазоне практически совпадает для трех исследуемых схем и соответствует длинноволновому обратному перераспределению кинетической энергии. Наибольший энергетический вклад в ОПКЭ приходится на компенсацию ошибок аппроксимации схемы (35% от  $\epsilon$ ), а оставшиеся 15% – на компенсацию взаимодействия с неразрешенными масштабами. Недоучтенная генерация энергии в длинноволновом диапазоне убывает с увеличением разрешения (при разрешении  $720 \times 720$  генерация составляет 15% от притока энергии  $\epsilon$ ).

Как видно из рисунка, перенос энергии из подсеточных масштабов сильно нелокален в фурье-пространстве: максимум генерации энергии приходится примерно на середину инерционного интервала обратного каскада энергии и вносит систематический положительный вклад в энергию крупных гармоник. Отсутствие этого вклада в моделях с грубой сеткой ведет к затуханию крупномасштабной изменчивости, как показано в разделе 2.3.2, см. рисунок 2.2(b).

### 3.1.2 Воспроизведение ОПКЭ с помощью модели подобия масштабов

Спектр генерации энергии подсеточными силами, расположенный на инерционном интервале обратного каскада энергии, может быть воспроизведен с помощью модели подобия масштабов [46], которая имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = \dots - C_{sim} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\widetilde{u}_j \widetilde{u}_i} - \widetilde{u}_j \widetilde{u}_i), \quad (3.11)$$

здесь  $C_{sim}$  – безразмерный коэффициент порядка 1,  $\overline{(\cdot)}$  – "базовый" фильтр, определенный выше, а  $\widetilde{(\cdot)}$  – "тестовый" фильтр, применяемый к полям грубой модели  $\bar{u}_i$ . Тестовый фильтр основан на трехточечном шаблоне по каждому

направлению:

$$F_{x_i}(\varphi) = a\varphi(x_i - h_{x_i}) + (1 - 2a)\varphi(x_i) + a\varphi(x_i + h_{x_i}), \quad (3.12)$$

где коэффициент  $a < 1/2$  определяет ширину фильтра  $\Delta_F/h_{x_i} = \sqrt{24a}$  [127]. Тестовый фильтр имеет вид:

$$\tilde{\varphi} = F_{x_2}(F_{x_1}(\varphi)) = F_{x_1}(F_{x_2}(\varphi)). \quad (3.13)$$

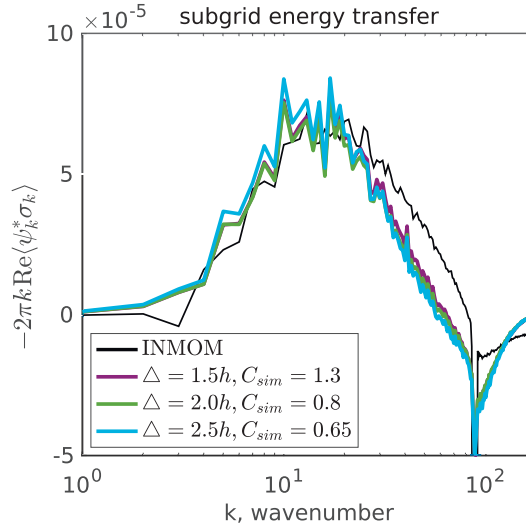


Рисунок 3.2 — Спектральное распределение генерации энергии подсеточными силами для схемы INMOM (черная линия), а также для моделей подобия масштабов, которые отличаются шириной тестового фильтра  $\Delta$  и константой  $C_{sim}$ . Разрешение DNS  $2160^2$ , разрешение грубой модели  $360^2$ .

Как следует из рисунка 3.2, спектр генерации энергии подсеточными силами в крупных масштабах для схемы INMOM (черная линия) хорошо воспроизводится моделями подобия масштабов (цветные линии) при различной ширине тестового фильтра,  $\Delta_F = 1.5h, 2.0h, 2.5h$ , при этом необходимо правильно выбрать константу  $C_{sim} = 1.3, 0.8, 0.65$ . Если отфильтровать мелкие масштабы в модели (3.11), то с её помощью можно описать ОПКЭ.

## 3.2 Подсеточные параметризации

В данном разделе описаны предложенные нами схемозависимые подсеточные параметризации, основанные на априорном анализе схемных ошибок.

В качестве базовой модели турбулентности выберем бигармонический оператор, как это сделано в исходной постановке задачи (2.1), (2.2). Параметризации ОПКЭ настраиваются таким образом, чтобы воспроизводить спектр генерации энергии подсеточными силами на инерционном интервале обратного каскада энергии ( $k < 90$ ), который изображен на рисунке 3.1(b). Учитываются только те волновые числа, при которых генерация положительная. Поскольку спектр генерации энергии практически совпадает для трех исследуемых схем, стохастическая параметризация настраивается только по одной из них – схеме Z, и эта параметризация применяется в апостериорных экспериментах для всех схем адвекции.

### 3.2.1 Стохастическая параметризация

Стохастическая параметризация ОПКЭ основана на авторегрессионной модели, как предложено в [78]. Параметры модели выбираются таким образом, чтобы воспроизвести спектр генерации энергии подсеточными силами и воспроизвести характерные времена подсеточных сил, которые зависят от модуля волнового числа ( $k$ ).

Уравнение динамики в Фурье-пространстве с учетом некоторой аппроксимации по времени имеет следующий вид:

$$\frac{\omega_k^{n+1} - \omega_k^n}{\Delta t} = F_k^n + s_k^n, \quad (3.14)$$

где  $F_k^n$  обозначает все правые части,  $s_k^n$  – стохастическая параметризация,  $n$  – номер слоя по времени. Стохастическая тенденция моделируется с помощью AR1 процесса [128]:

$$s_k^{n+1} = \beta_k s_k^n + d_k \varepsilon_k^n,$$

где  $\beta_k \in [0,1)$  – коэффициент затухания,  $\varepsilon_k^n$  – комплексный белый шум по времени с единичной дисперсией,  $d_k$  – амплитуда шума. Поскольку однородная турбулентность характеризуется статистически-независимыми фурье-коэффициентами, то  $\varepsilon_k^n$  также выбираются независимыми для каждого волнового вектора. Ковариационные матрицы имеют вид [128]:

$$\langle \varepsilon_k^m \varepsilon_k^{n*} \rangle = \delta_{m,n}, \quad \langle s_k^m s_k^{n*} \rangle = \beta_k^{|m-n|} \frac{d_k^2}{1 - \beta_k^2}. \quad (3.15)$$

Здесь \* обозначает комплексное сопряжение, а угловые скобки – осреднение по реализациям случайного процесса,  $\delta_{m,n}$  – символ Кронекера. Из (3.15) можно получить время корреляции  $\tau_k$  и дисперсию процесса  $s_k^n$ :

$$\tau_k = \frac{\Delta t}{1 - \beta_k}, \quad \langle s_k^n s_k^{n*} \rangle = \frac{d_k^2}{1 - \beta_k^2}. \quad (3.16)$$

Оценим энергетический вклад от стохастического воздействия  $s_k^n$ . Согласно [129; 130], приток энергии ( $E_k = \frac{1}{k^2} \omega_k \omega_k^*/2$ ) на малом интервале времени  $\Delta t$  имеет следующий вид:

$$k^2 \frac{\Delta E_k}{\Delta t} = \text{Re}(\omega_k^n s_k^{n*}) + \frac{\Delta t}{2} s_k^n s_k^{n*}. \quad (3.17)$$

Правая часть этого уравнения может быть выражена через свойства стохастического процесса, если подставить выражение для решения,  $\omega_k^n = \Delta t \sum_{m=0}^{n-1} (s_k^m + F_k^m)$ . Предполагая, что  $\langle F_k^m s_k^{n*} \rangle = 0$  (см. также [78]), и производя суммирование с учетом вида ковариационной матрицы (3.15), получаем:

$$k^2 \left\langle \frac{\Delta E_k}{\Delta t} \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta t \left[ \frac{1}{2} \langle s_k^n s_k^{n*} \rangle + \sum_{m=0}^{n-1} \langle s_k^m s_k^{n*} \rangle \right] = \frac{\Delta t}{2} \frac{d_k^2}{(1 - \beta_k)^2}. \quad (3.18)$$

Коэффициент затухания  $\beta_k$  выбирается таким образом, чтобы время корреляции  $\tau_k$  совпадало со временем экспоненциального затухания автокорреляционной функции подсеточных сил. Параметр  $\tau_k$  зависит от волнового числа и уменьшается в коротковолновом диапазоне. Амплитуда  $d_k$  выбирается таким образом, чтобы приравнять приток энергии от стохастической параметризации (3.18) к притоку от подсеточных сил на инерционном интервале обратного каскада энергии:

$$\left\langle \frac{\Delta E_k}{\Delta t} \right\rangle = \max(-\text{Re}\langle \bar{\Psi}_k^* \sigma_k \rangle, 0). \quad (3.19)$$

Амплитуда стохастической параметризации достаточно мала по сравнению с амплитудой разрешаемой адвекции в крупных масштабах, см. рисунок 3.1(а), зеленая линия.

Обозначим через  $s^\omega(\mathbf{x}, t)$  стохастическую тенденцию в физическом пространстве. Тенденцию в переменных скорость-давление можно найти следующим образом:

$$(s_1^u, s_2^u) = \left( -\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \Delta^{-1} s^\omega(\mathbf{x}, t). \quad (3.20)$$

### 3.2.2 Параметризация отрицательной вязкости

Следуя работе [131], выпишем линейную модель вихревой вязкости в Фурье-пространстве:

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial t} = \dots - \nu(k) k^2 \omega_k, \quad (3.21)$$

где  $\nu(k)$  – вихревая вязкость, зависящая от волнового числа. Приток энергии за счет параметризации имеет вид:

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} = \dots - \nu(k) \omega_k^* \omega_k.$$

Отрицательные значения вязкости ( $\nu(k) < 0$ ) описывают генерацию энергии. Для того чтобы напрямую сравнить эту параметризацию со стохастической, коэффициент вязкости выбирается следующим образом:

$$\nu(k) = - \left\langle \frac{\Delta E_k}{\Delta t} \right\rangle / \langle \omega_k^* \omega_k \rangle,$$

где спектр генерации энергии ( $\langle \frac{\Delta E_k}{\Delta t} \rangle$ ) и спектр решения ( $\langle \omega_k^* \omega_k \rangle$ ) соответствуют апостериорному эксперименту с грубой моделью, возбуждаемой стохастической параметризацией.

### 3.2.3 Модель подобия масштабов

Для того чтобы избавиться от диссипации энергии в малых масштабах, тенденция модели (3.11) дополнительно фильтруется с помощью спектрального фильтра: Фурье-коэффициенты с большим модулем волнового числа ( $k > 0.9k_f$ ) зануляются. Этот фильтр обозначается как  $\widehat{(\cdot)}$ . В переменных скорость–давление модель имеет вид:

$$- C_{sim} \frac{\partial}{\partial x_j} (\widehat{l_{ij}^u}), \quad l_{ij}^u = \widetilde{u_j u_i} - \widetilde{u_j} \widetilde{u_i}. \quad (3.22)$$

Для построения тестового фильтра используется  $a = 1/6$  в формуле (3.12), что соответствует ширине фильтра  $\Delta_F/h = 2$ .

В переменных функция тока–завихренность модель может быть записана аналогичным образом:

$$- C_{sim} \frac{\partial}{\partial x_j} (\widehat{l}_j^\omega), \quad l_j^\omega = \widetilde{u}_j \widetilde{\omega} - \widetilde{u}_j \widetilde{\omega}. \quad (3.23)$$

Константа  $C_{sim}$  выбиралась таким образом, чтобы приравнять интегральный приток энергии от данной параметризации к притоку энергии от стохастической параметризации. Для схем INMOM, INMCM, Z, CCS выбирались следующие значения  $C_{sim}$  соответственно: 4.1, 1.5, 2.3, 2.6. Существенное различие в константе  $C_{sim}$  связано с тем, что данная параметризация моделирует подсеточные силы на основе мелкомасштабного вихревого поля, которое значительно отличается для исследуемых схем адвекции.

### 3.2.4 Комбинированная параметризация: стохастика + модель подобия масштабов

Комбинированная модель является линейной комбинацией (3.22), (3.23) и стохастической тенденции (3.20):

$$C_{stoch} s_i^u - C_{sim} \delta_{x_j} \widehat{l}_{ij}^u, \quad (3.24)$$

$$C_{stoch} s^\omega - C_{sim} \delta_{x_j} \widehat{l}_j^\omega. \quad (3.25)$$

Оптимальный выбор параметров  $C_{stoch}$  и  $C_{sim}$  обсуждается ниже.

## 3.3 Численные эксперименты

Численные эксперименты с грубыми моделями проведены аналогично тому, как описано в разделе 2.3.2: при разрешении  $360 \times 360$ , бигармоническая вязкость  $\nu = 2.13 \cdot 10^{-9}$ . Для каждой численной схемы (INMOM, INMCM, Z, CCS) проведены эксперименты без параметризации ОПКЭ ("no backscatter") и с одной из следующих параметризаций: стохастическая ("stochastic") 3.2.1, отрицательной вязкости ("negative visc.") 3.2.2, подобия масштабов ("similarity")



3.2.3, комбинированная модель ("stochastic+similarity") 3.2.4. Во всех экспериментах со стохастической параметризацией использовался один и тот же спектр генерации энергии, соответствующий схеме Z, см. рисунок 3.1(b).

На рисунках 3.3 и 3.4 изображены спектр энергии и компенсированный спектр энергии (домноженный на  $\varepsilon^{-2/3}k^{5/3}$ ) для грубых моделей по сравнению с эталонным расчетом (черная линия). Стохастическая параметризация (красная линия) позволяет восстановить крупные масштабы ( $1 < k < 5$ ), однако средние масштабы ( $5 < k < 90$ ) характеризуются заниженным уровнем энергии. Увеличение мощности стохастической параметризации приводит к еще большему усилению крупных масштабов, однако средние масштабы остаются практически неизменными.

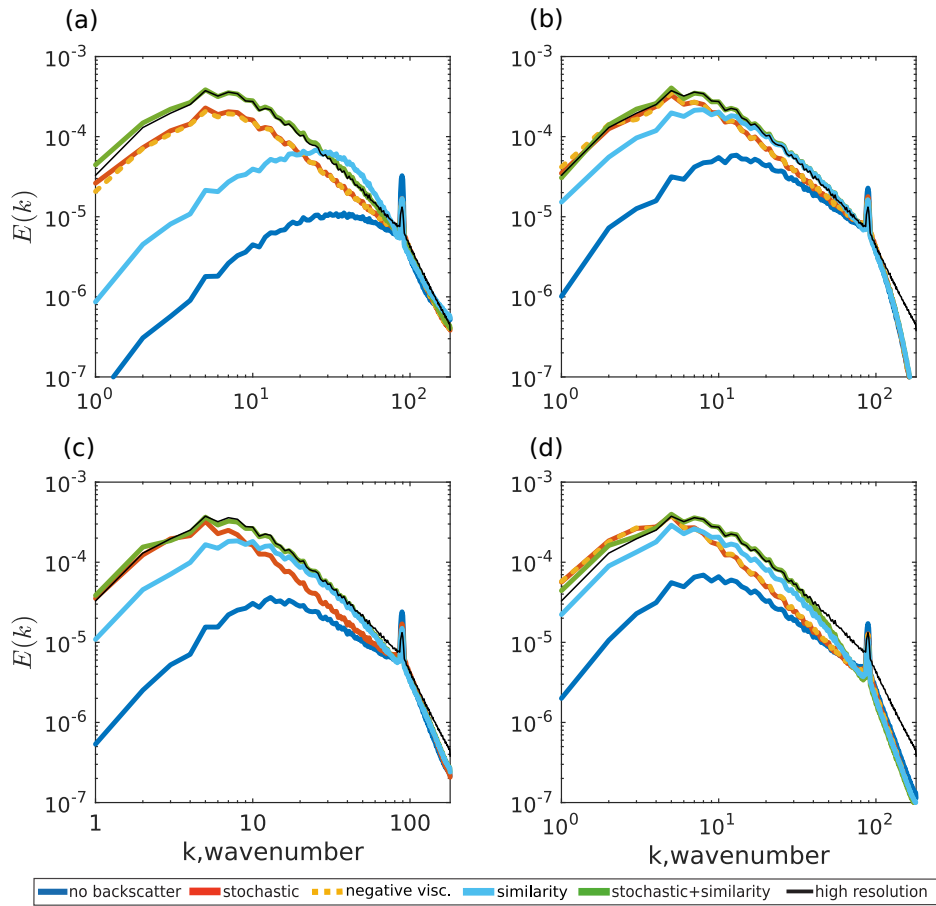


Рисунок 3.3 — Спектральная плотность энергии грубых моделей для четырех схем адвекции, (a) – INMOM, (b) – INMCM, (c) – Z, (d) – CCS. Черная линия соответствует эталонной модели.

Использование параметризации отрицательной вязкости (желтая линия) приводит к аналогичным результатам, однако, одна из схем (схема Z) оказывается неустойчивой: мелкие вихри на масштабе внешнего воздействия растут неограниченно.

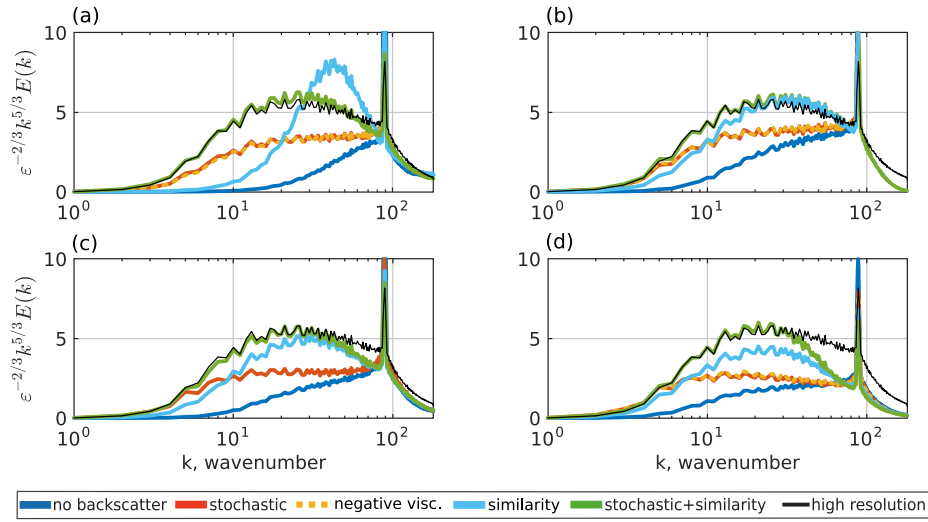


Рисунок 3.4 — Аналогично рисунку 3.3, но приведен компенсированный спектр энергии (домножен на  $\varepsilon^{-2/3} k^{5/3}$ ).

Параметризация подобия масштабов не поставляет достаточно энергии в крупные масштабы, однако эффективно восстанавливает спектр энергии в средних масштабах (голубая линия на рисунках 3.3 и 3.4). Мы предполагаем, что комбинированная модель может восстановить спектральную плотность энергии в крупных и мелких масштабах. С этой целью, свободные параметры в формулах (3.24) и (3.25) выбирались экспериментально таким образом, чтобы добиться максимального соответствия в спектре энергии для грубой и эталонной модели в диапазоне волновых чисел ( $1 < k < 40$ ). Для схем INMOM, INMCM, Z, CCS использовались следующие значения  $C_{stoch}$  и  $C_{sim}$ : (1.25, 1.7), (0.79, 1.4), (0.76, 2.5) and (0.43, 4.0). При таком выборе коэффициентов интегральный приток энергии от комбинированной модели оказывается практически равным интегральной диссипации за счет модели бигармонической вязкости. Таким образом, мы экспериментально подтверждаем, что оптимальное количество диссипируемой энергии за счет суммарного подсеточного замыкания (бигармоническая вязкость и ОПКЭ) близко к нулю; такое предположение часто используется при настройке параметризаций, относящихся к классу "energetically consistent КЭВ", [69]. Использование комбинированной модели позволяет правильно воспроизводить компенсированный спектр энергии (см. зеленая линия на рис. 3.4), который на инерционном интервале обратного каскада энергии становится сравнимым с константой Колмогорова  $C_f \approx 6 \pm 0.5$  [132]. Аналогичная характеристика при использовании стохастической параметризации и параметризации отрицательной вязкости оказывается значительно заниженной ( $C_f \approx 3 - 4$ , красная и желтая линии на рисунке 3.4).

На рисунке 3.5(a) представлена типичная реализация функции тока в эталонном расчете. Функция тока в грубой модели (основанной на схеме INMOM) имеет практическую нулевую крупномасштабную компоненту, см. рисунок 3.5(b). Использование стохастической параметризации и параметризации отрицательной вязкости улучшает структуру течений, см. рисунки 3.5(c),(d). Наибольшее совпадение в крупномасштабной структуре течений наблюдается для комбинированной модели, см. рисунок 3.5(e).

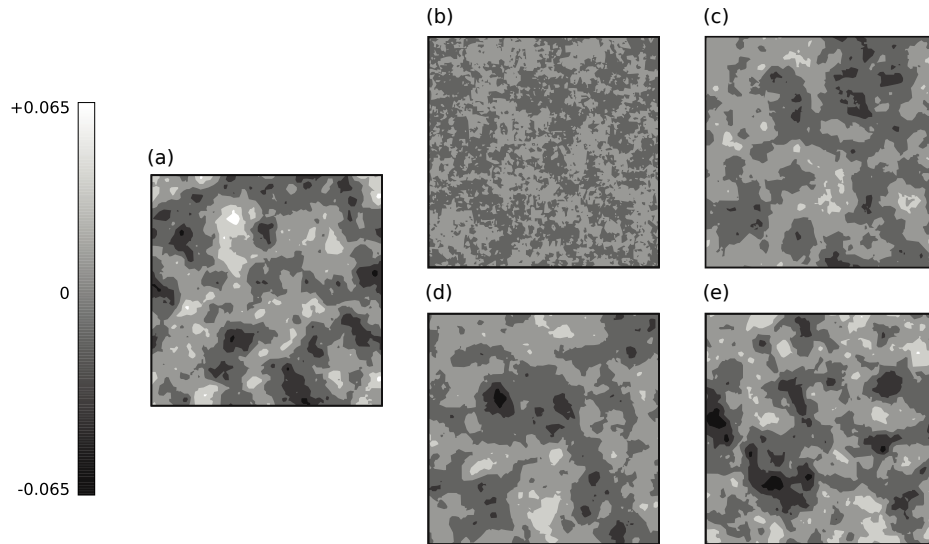


Рисунок 3.5 — Мгновенная функция тока эталонной модели (a), и для грубой модели со схемой INMOM без параметризации ОПКЭ (b), стохастическая параметризация (c), параметризация отрицательной вязкости (d), комбинированная параметризация (e).

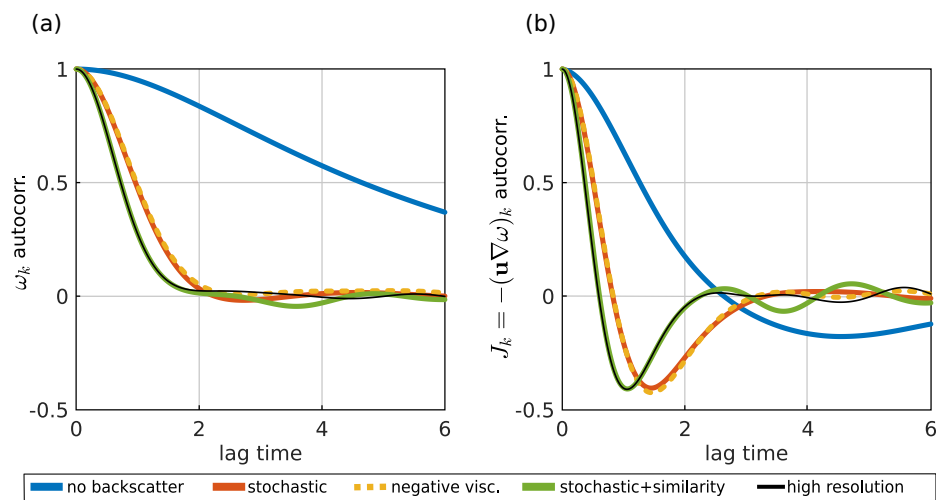


Рисунок 3.6 — Автокорреляционные функции Фурье-коэффициентов решения (a) и адвекции (b) при волновом числе 30, грубая модель со схемой INMOM.

Таблица 3 — Относительная ошибка в средней функции тока, приведенная для двух норм.

	$\ \langle \psi \rangle - \langle \psi_{DNS} \rangle\ _\infty / \ \langle \psi_{DNS} \rangle\ _\infty$				$\ \langle \psi \rangle - \langle \psi_{DNS} \rangle\ _2 / \ \langle \psi_{DNS} \rangle\ _2$			
	INMOM	INMCM	Z	CCS	INMOM	INMCM	Z	CCS
no backscatter	0.83	0.47	0.68	0.58	0.44	0.30	0.39	0.37
stochastic	0.13	0.08	0.09	0.10	0.13	0.11	0.10	0.11
negative viscosity	0.17	0.09	неуст.	0.11	0.19	0.13	неуст.	0.14
stochastic+similarity	0.07	0.08	0.05	0.05	0.11	0.10	0.07	0.08

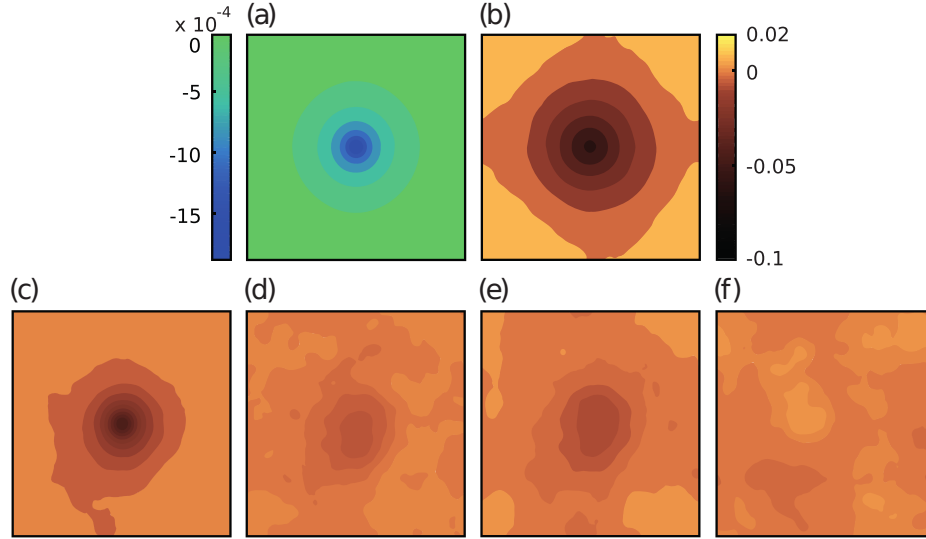


Рисунок 3.7 — Постоянное внешнее воздействие (a) представленное функцией тока, средняя функция тока эталонной модели (b). Ошибка в средней функции тока грубой модели (схема INMOM): (c) – без параметризации ОПКЭ, (d) – стохастическая параметризация, (e) – параметризация отрицательной вязкости, (f) – комбинированная параметризация.

Автокорреляционные функции решения  $\omega_k$  и адвекции  $(\mathbf{u}\nabla\omega)_k$  при волновом числе  $k = 30$ , которое соответствует средним масштабам, представлены на рисунке 3.6. Использование параметризаций позволяет уменьшить характерные времена изменчивости, причем наилучшее совпадение с эталонным расчетом наблюдается для комбинированной модели.

Для задач моделирования климата важным свойством является правильное описание чувствительности к постоянному внешнему воздействию в грубой модели. Для сравнения характеристик чувствительности, мы добавляем в правую часть уравнений динамики постоянное воздействие, достаточно малое, с точки зрения систематического притока энергии:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \dots + 0.09 \cdot \exp(-70 \cdot [(x_1 - \pi)^2 + (x_2 - \pi)^2]). \quad (3.26)$$

Отклик системы на воздействие (3.26) состоит в формировании среднего течения. Среднее течение находилось путем осреднения на протяжении 24000 единиц времени. Функция тока внешнего воздействия (а), среднее течение в эталонной модели (b) и ошибки в среднем для грубых моделей (с-f) приведены на рисунке 3.7.

Грубые модели без параметризации (рисунок 3.7(с)) дают ошибки, сравнимые с откликом эталонной модели (см. нормы ошибок в таблице 3). Использование стохастической параметризации уменьшает ошибку (рис. 3.7(d)). Ошибка при использовании параметризации отрицательной вязкости оказывается больше, по сравнению со стохастической параметризацией (рис. 3.7(e)). Минимальные ошибка соответствуют комбинированной параметризации (рис. 3.7(f)).

### 3.4 Выводы

В данной главе диссертации проведен априорный анализ подсеточных сил в задаче форсированной турбулентности, при выборе внешнего воздействия вблизи масштаба сетки. Анализ проведен с учетом численных схем адвекции. Показано, что подсеточные силы оказывают систематическое энергетическое воздействие на масштабах инерционного интервала обратного каскада энергии. Недоучтенная генерация энергии в длинноволновом диапазоне практически совпадает для трех исследуемых конечно-разностных схем второго порядка, что позволяет пользоваться одинаковыми параметризациями для всех исследуемых численных схем. По этой причине, в последующих главах диссертации будет рассматриваться только одна численная схема адвекции второго порядка.

Для моделирования энергетического воздействия было настроено несколько параметризаций длинноволнового ОПКЭ. Показано, что такие параметризации способны улучшить воспроизведение спектральной плотности энергии и автокорреляционные функции решения. Как и предполагалось, в отсутствие средних течений стохастическая параметризация и параметризация отрицательной вязкости дают аналогичные результаты. Отличия наблюдаются при воспроизведении среднего течения (чувствительность к внешнему воздействию). Модель отрицательной вязкости оказалась численно неустойчивой для одной из схем (Z).

В априорных и апостериорных экспериментах показано, что ОПКЭ в длинноволновом диапазоне воспроизводится моделью подобия масштабов. Данная модель наиболее эффективно восстанавливает спектр энергии в средних масштабах, а параметризация отрицательной вязкости и стохастическая параметризация лучше работают в крупных масштабах. По этой причине наилучший результат возможно получить для комбинированной модели, для которой спектр энергии восстанавливается на всем инерционном интервале обратного каскада энергии. Однако, комбинированная модель требует ручной настройки свободных параметров. Экспериментально установлено, что оптимальные значения этих параметров соответствуют случаю, когда приток энергии от ОПКЭ параметризации приблизительно равен диссипации за счет бигармонической вязкости; этот факт оправдывает применение параметриза-

ций, настраиваемых на основе баланса энергии ("energetically consistent КЕВ", [69]).

Отметим, что стохастическая параметризация, возбуждающая течения на масштабах энстрофийного каскада (коротковолновый ОПКЭ), не позволяет улучшить воспроизведение инерционного интервала обратного каскада энергии (см. приложение Б). Такие параметризации предлагались для моделирования ОПКЭ в ансамблевых моделях прогноза погоды [78].

Отметим некоторые недостатки модели подобия масштабов, которые препятствуют её применению в более реалистичных задачах (она не представлена в главе 5, где исследуется модель океана NEMO). Для воспроизведения ОПКЭ с помощью этой модели, необходимо построение селективного коротковолнового фильтра. Для моделей реального океана с боковыми границами потребуются строить такой фильтр в физическом пространстве, что вычислительно затратно. Кроме того, при фильтрации возникает проблема задания боковых граничных условий. Еще одним требованием успешного применения модели является наличие протяженного инерционного интервала обратного каскада энергии, что не всегда реализуется в моделях реальных геофизических течений.

#### Глава 4. Исследование влияния подсеточных параметризаций на воспроизведение баротропной неустойчивости

Предыдущая глава посвящена исследованию подсеточных параметризаций в задаче моделирования однородной изотропной двумерной турбулентности. Геофизические течения, наблюдаемые в атмосфере и океане, состоят из средних течений и турбулентных флуктуаций, и подсеточные вихри воздействуют на обе компоненты разрешаемых течений. Согласно работе [76], параметризации, построенные в предыдущей главе, описывают взаимодействие подсеточных турбулентных флуктуаций с разрешаемыми, "eddy–eddy interactions". Также в приведенной работе предложено отдельно моделировать воздействие подсеточных флуктуаций на разрешаемые средние течения ("eddy–meanfield interactions") с помощью детерминистического оператора вихревой вязкости. Из распределения вихревой вязкости по волновым числам [76] следует, что как и в "eddy-eddy" взаимодействиях, вихревая вязкость в "eddy-meanfield" взаимодействиях является положительной в мелких масштабах и отрицательной в крупных. В работах [72; 73] указано, что стохастические подсеточные параметризации могут инициировать рост неустойчивости среднего течения, и тем самым способствуют преобразованию кинетической энергии среднего течения в турбулентную кинетическую энергию.

Из вышесказанного следует, что подсеточные параметризации могут быть полезны и в задачах с сильным средним течением. В данной главе рассмотрен предельный случай, когда в начальный момент времени решение представлено неустойчивым стационарным баротропным струйным течением. Такая задача позволяет изучить свойства подсеточных параметризаций в том случае, когда турбулентные флуктуации имеют специальный вид: описываются линеаризованными относительно среднего течения уравнениями, и моды баротропной неустойчивости могут быть найдены с помощью анализа спектра линеаризованного оператора. Развитие баротропной неустойчивости рассматривается в статистическом смысле: проведено ансамблевое усреднение по реализациям внешнего стохастического воздействия, которое моделирует воздействие мезомасштабных атмосферных течений на струйное течение в океане. Качество подсеточных параметризаций оценивается по тому, как в грубой модели воспроизводится энергия флуктуаций, связанных с модами баротроп-



ной неустойчивости. Подсеточные замыкания применяются ко всему течению без его разделения на среднюю и флуктуационную составляющие, поскольку в реалистичных задачах подобное разделение не всегда возможно. В отличие от предыдущей главы, все параметризации построены без использования преобразования Фурье. Модель отрицательной вязкости и стохастическая модель настроены таким образом, чтобы компенсировать диссипацию, связанную с бигармонической вязкостью ("energetically consistent КЕВ"). В отличие от предыдущей главы, модель подобия масштабов применяется без дополнительного спектрального фильтра.

#### 4.1 Уравнения и параметры модели

Рассмотрим уравнения аналогичные (2.1) на квадрате  $\Omega = [0, 2\pi)^2$  с периодическими граничными условиями:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{D} + \mathbf{F}, \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.2)$$

где  $\mathbf{D}$  – мелкомасштабная диссипация, обеспечиваемая моделью вихревой вязкости, а  $\mathbf{F}$  – внешнее стохастическое воздействие. Для численной дискретизации используется схема INMOM, описанная в главе 2.2.1.

В качестве начального условия мы выбираем неустойчивое струйное течение, предложенное в [133] с небольшими изменениями:

$$u_x|_{t=0} = \exp\left(\frac{\pi^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \exp\left[\frac{\pi^4}{2\sigma^2} \cdot \frac{1}{y \cdot (y - 2\pi)}\right], \quad (4.3)$$

$$u_y|_{t=0} = 0. \quad (4.4)$$

Среднее по пространству вычитается (не показано в формуле). Поле скорости (4.3) бесконечно дифференцируемо в  $\Omega$  и определено равным нулю на границах  $y = 0, y = 2\pi$ . В центре канала ( $y = \pi$ ) скорость принимает максимальное значение, равное 1, и может быть аппроксимировано гауссовой функцией с дисперсией  $\sigma^2$ :  $\exp\left[\frac{\pi^4}{2\sigma^2} \cdot \frac{1}{y \cdot (y - 2\pi)}\right] = \exp\left[-\frac{\pi^2}{2\sigma^2}\right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y - \pi)^2 + O((y - \pi)^4)\right]$ .

### 4.1.1 Модель вихревой вязкости и внешнее воздействие

Мы используем модель вихревой вязкости (МВВ) [134], основанную на бигармоническом операторе,

$$D_i = -2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu \Delta S_{ij}), \quad (4.5)$$

с коэффициентом вязкости Смагоринского  $\nu = C_{smag} h^4 |S|$ ,  $C_{smag} = 0.06$  [83],  $h$  – шаг сетки,  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  – тензор скоростей деформации, а  $|S| = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$  – его модуль.

Внешнее воздействие  $\mathbf{F}$  имитирует влияние атмосферы на океан в мезомасштабном атмосферном диапазоне, где наклон энергетического спектра составляет  $-5/3$ , [135]. На каждом временном шаге мы генерируем функцию тока "атмосферного течения"  $\psi^F(x, y)$  в пространстве Фурье со следующим распределением энергии по волновым числам:  $E(k) = k^{-5/3} \exp[-(k/k^F)^8]$ , где  $k^F$  – волновое число отсечения, введенное для обеспечения быстрой сходимости статистических характеристик с увеличением разрешения. Коэффициенты Фурье случайного поля  $\psi^F$  – статистически независимые белые шумы с дискретным временем. Сила, с которой "атмосферное" течение воздействует на жидкость вычисляется по "bulk" формуле:  $f_i = u_i^F |\mathbf{u}^F|$ , где  $u_i^F$  – скорость, соответствующая функции тока  $\psi^F$ . После вычитания пространственного среднего и дивергентной компоненты, получаем поле  $\hat{f}_i$ . Численное интегрирование внешнего воздействия производится по методу Эйлера. В этом случае имеем простую формулу для притока энергии [129]:

$$F_i = A \hat{f}_i, \quad (4.6)$$

$$\left\langle \frac{\partial |\mathbf{u}|^2 / 2}{\partial t} \right\rangle = \dots + \frac{\Delta t}{2} \langle F_1^2 + F_2^2 \rangle = \dots + \frac{A^2 \Delta t}{2} \langle \hat{f}_1^2 + \hat{f}_2^2 \rangle, \quad (4.7)$$

где  $A$  – амплитуда внешнего воздействия, скобки  $\langle \cdot \rangle$  означают осреднение по ансамблю.

### 4.1.2 Параметры экспериментов

Уравнения (4.1), (4.2) интегрируются до  $t = 25$  для ансамбля, состоящего из 100 реализаций стохастического внешнего воздействия. Амплитуда  $A$  выбирается таким образом, чтобы за все время расчета обеспечить приток от внешнего воздействия энергии, равной 1% от энергии начального состояния. Эталонная модель имеет разрешение  $512 \times 512$ . Модель с промежуточным разрешением ( $128 \times 128$ ) используется для демонстрации сходимости статистических характеристик. Подсеточные параметризации анализируются для моделей с грубым разрешением ( $32 \times 32$ ,  $64 \times 64$ ). Максимальное волновое число для самой грубой модели равно 16. Внешнее воздействие  $\mathbf{F}$  и начальные условия (4.3) хорошо разрешаются на вычислительной сетке. Волновое число отсечения для  $\mathbf{F}$  равно  $k^F = 8$ . Ширина начальной струи составляет  $2\sigma = 1/2$ . Принимая во внимание преобразование Фурье гауссового распределения,  $|\mathbb{F}(u_x|_{t=0})|^2 \sim \exp[-k_y^2 \sigma^2]$ , волновое число экспоненциального затухания Фурье-коэффициентов струи  $k_y = 4$ .

## 4.2 Статистические характеристики баротропной неустойчивости

Стохастическое воздействие  $\mathbf{F}$  позволяет ввести осреднение по ансамблю реализаций, обозначаемое угловыми скобками. Тогда разложение Рейнольдса имеет вид:

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}', \quad (4.8)$$

где  $\langle \mathbf{u} \rangle$  – среднее течение и  $\mathbf{u}'$  – турбулентные флуктуации. В качестве статистических характеристик возникающих турбулентных флуктуаций выбрана энергия нарастающих мод баротропной неустойчивости.

Для нахождения неустойчивых мод, перейдем к представлению уравнений (4.1), (4.2) в терминах функции тока:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta^{-1} J(\psi, \Delta \psi) = f_\psi, \quad (4.9)$$

где  $J(\psi, \Delta \psi) = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y}$  – якобиан, а  $f_\psi$  – стохастическое воздействие  $\mathbf{F}$  в представлении функции тока. В уравнении (4.9) вклад вихревой

вязкости  $\mathbf{D}$  не учитывается, поскольку она стремится к нулю при  $h \rightarrow 0$ . Линеаризуем уравнение (4.9) относительно начального течения (4.3), (4.4), которое в терминах функции тока обозначим как  $\psi_0(y)$ :

$$\frac{\partial \psi'}{\partial t} = A(y)\psi' + f_\psi, \quad (4.10)$$

где  $A(y) = \left[ \Delta^{-1} \left( \frac{d\psi_0(y)}{dy} \Delta - \frac{d^3\psi_0(y)}{dy^3} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right] \psi'$ . Предполагается, что оператор Лапласа действует на подпространстве функций с нулевым средним значением, на котором он является обратимым.

### 4.2.1 Численное решение проблемы собственных значений

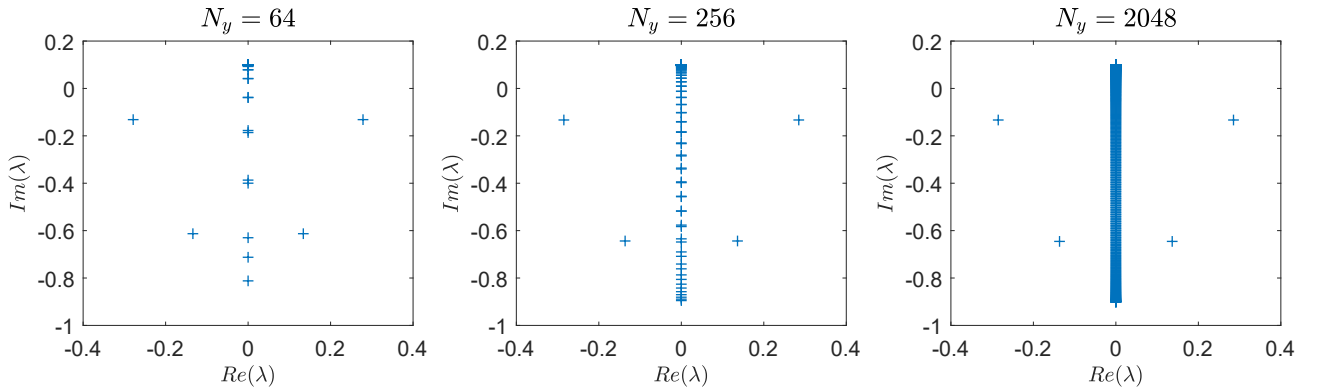


Рисунок 4.1 — Собственные значения матрицы  $H$  для  $k_x = 1$  при различных  $N_y$ .

Начнем с задачи на собственные значения  $A(y)\Psi(x, y) = \lambda\Psi(x, y)$ , которая может быть упрощена с учетом того, что  $A(y)$  не зависит от  $x$ . Разделяя переменные,  $\Psi(x, y) \equiv \Psi(y)e^{ik_x x}$ , где  $i$  — мнимая единица,  $k_x \in \mathbb{Z} \setminus 0$  ( $k_x = 0$  соответствует тривиальным стационарным модам), мы приходим к одномерной задаче на собственные значения для  $\Psi(y)$ :

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} - k_x^2 \right)^{-1} \left( \frac{d\psi_0(y)}{dy} \left( \frac{d^2}{dy^2} - k_x^2 \right) - \frac{d^3\psi_0(y)}{dy^3} \right) ik_x \Psi(y) = \lambda \Psi(y). \quad (4.11)$$

Проблема собственных значений (4.11) решается численно. Введем равномерную сетку вдоль направления  $y$  с количеством узлов  $N_y$  и шагом  $h_y =$

$2\pi/N_y$ . Координаты узлов:

$$y_j = jh_y, \quad j = \overline{0, N_y - 1}. \quad (4.12)$$

Обозначим матрицей  $L$  аппроксимацию методом конечных разностей оператора  $\frac{d^2}{dy^2}$ , а матрицей  $E$  единичную матрицу. Матрицы  $M_1$  и  $M_2$  определяются следующим образом:  $M_1 = \text{diag}\left(\frac{d\Psi_0(y)}{dy}\Big|_{y_j}\right)$  и  $M_2 = \text{diag}\left(\frac{d^3\Psi_0(y)}{dy^3}\Big|_{y_j}\right)$ . Тогда конечно-разностный аналог (4.11) будет иметь вид:

$$H(k_x)\Psi = \lambda\Psi, \quad \Psi \in \mathbb{C}^{N_y}, \quad H(k_x) \in \mathbb{C}^{N_y \times N_y}, \quad (4.13)$$

где матрица  $H$  зависит от  $k_x$  следующим образом:

$$H(k_x) = (L - k_x^2 E)^{-1}(M_1(L - k_x^2 E) - M_2)ik_x. \quad (4.14)$$

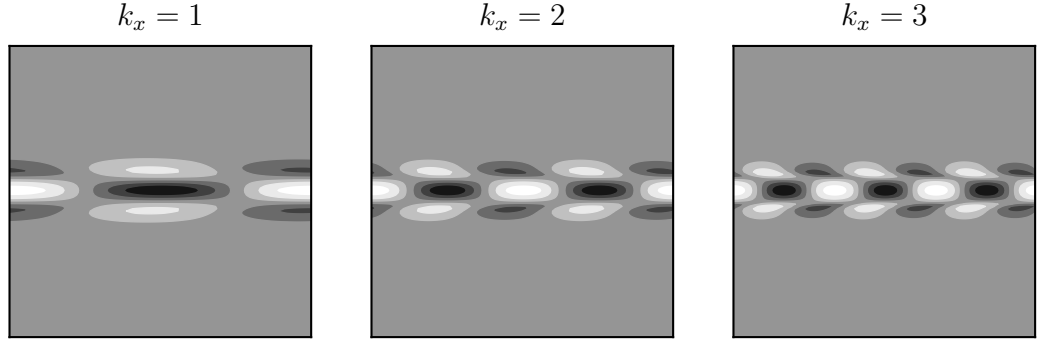
Для  $k_x \in \mathbb{N}$  мы решаем полную задачу на собственные значения (4.13). Сходимость ведущих собственных значений, то есть  $\max(\text{Re}(\lambda))$ , по количеству узлов сетки  $N_y$  показана на рисунке 4.1 для  $k_x = 1$ . Для других  $k_x$  получаются аналогичные рисунки. Собственные значения с  $\text{Re}(\lambda) > 0$  отделены от остального спектра и поэтому являются простыми собственными значениями. Из-за особой структуры матрицы  $H$  ( $\text{Re}(H) = 0$ ) эти собственные значения встречаются парами:  $H\Psi = \lambda\Psi$  и  $H\bar{\Psi} = -\bar{\lambda}\bar{\Psi}$  (верхняя черта обозначает комплексное сопряжение), и это видно на рисунке 4.1. Собственные векторы матрицы  $H(-k_x)$  совпадают с собственными векторами матрицы  $H(k_x)$ , а собственные значения меняют знак. Действительнозначная неустойчивая мода имеет вид:

$$\Psi(y)e^{ik_x x} e^{\lambda t} + \overline{\Psi(y)}e^{-ik_x x} e^{\bar{\lambda} t} \equiv 2\text{Re}(\Psi(y)e^{ik_x x} e^{\lambda t}). \quad (4.15)$$

Неустойчивые моды вычислены для сетки с числом узлов  $N_y = 2048$ . Среди всех  $k_x \in \mathbb{N}$  спектр  $A(y)$  имеет 8 растущих ( $\text{Re}(\lambda) > 0$ ) мод. Инкременты роста энергии ( $2\text{Re}(\lambda)$ ) приведены в таблице 4. Наиболее развитые в численных экспериментах моды выделены жирным шрифтом и изображены на рисунке 4.2. Ниже мы будем различать эти моды либо по волновым числам ( $k_x = 1, 2, 3$ ), либо по порядковым номерам (1-я, 2-я, 3-я мода).

Таблица 4 — Инкременты роста энергии неустойчивых мод для различных  $k_x$ .

$k_x$	1	2	3	4	5
$2Re(\lambda)$	<b>0.5704</b> 0.2732	<b>0.9861</b> 0.3414	<b>1.0539</b> 0.0864	0.7949	0.2682

Рисунок 4.2 — Наиболее развитые в численных экспериментах неустойчивые моды оператора  $A(y)$  в представлении завихренности (действительная часть).

Отрицательные значения черным, положительные белым.

#### 4.2.2 Определение энергии неустойчивой моды

Численные решения нелинейных уравнений (4.1), (4.2) разделяются на среднее течение и флуктуации относительно него согласно разложению (4.8). Флуктуации  $\psi'$  раскладываются по базису собственных функций оператора  $A(y)$ :

$$\psi' = \sum_i \alpha_i \Psi_i(x, y). \quad (4.16)$$

Поскольку базис является неортогональным, для осуществления проекции на неустойчивую моду  $\Psi_i(x, y)$  используется скалярное умножение на левый собственный вектор матрицы  $H(k_x)$ . Выражение для энергии неустойчивой моды имеет вид:

$$E_i = \frac{|\alpha_i|^2}{2} \int |2Re(\nabla \Psi_i)|^2 d\Omega. \quad (4.17)$$

### 4.2.3 Рост неустойчивой моды в присутствии внешнего стохастического воздействия

Проецируя решение уравнения (4.10) на подпространство, порождаемое некоторой неустойчивой модой, приходим к следующему уравнению для амплитуды неустойчивой моды  $\alpha$ :

$$d\alpha = \lambda\alpha dt + \sigma dW, \quad \alpha(0) = 0, \quad (4.18)$$

где  $\sigma dW$  – проекция стохастического воздействия  $f_\Psi$  на подпространство,  $\sigma > 0$ ,  $W$  – комплексный Винеровский процесс, т.е.  $\langle d\bar{W}dW \rangle = dt$ . Решая (4.18) для растущих мод ( $Re(\lambda) > 0$ ), мы получаем следующее выражение для  $\alpha$  [136]:

$$\langle |\alpha(t)|^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{2Re(\lambda)} (e^{2Re(\lambda)t} - 1). \quad (4.19)$$

Определим усредненную по ансамблю энергию неустойчивой моды  $\Psi(x, y)$ ,

$$\langle E \rangle = \frac{\langle |\alpha|^2 \rangle}{2} \int |2Re(\nabla\Psi)|^2 d\Omega \quad (4.20)$$

и генерацию энергии неустойчивой моды вследствие стохастического воздействия,  $\varepsilon = \frac{\sigma^2}{2} \int |2Re(\nabla\Psi)|^2 d\Omega$ . Тогда для усредненной по ансамблю энергии неустойчивой моды имеем следующее выражение:

$$\langle E(t) \rangle = \frac{\varepsilon}{2Re(\lambda)} (e^{2Re(\lambda)t} - 1). \quad (4.21)$$

Из формулы следует, что под действием внешнего форсинга  $\mathbf{F}$  энергия неустойчивой моды растет с инкрементом  $2Re(\lambda)$ , причем предэкспоненциальный множитель пропорционален мощности форсинга,  $\varepsilon$ .

### 4.2.4 Обзор результатов расчетов при различных разрешениях

В этом разделе показано, как модели с грубым разрешением воспроизводят баротропную неустойчивость.

Уравнения (4.1), (4.2) решаются численно, параметры приведены в разделе 4.1.2. Решения для эталонной (512<sup>2</sup>) и грубой (32<sup>2</sup>) моделей для двух

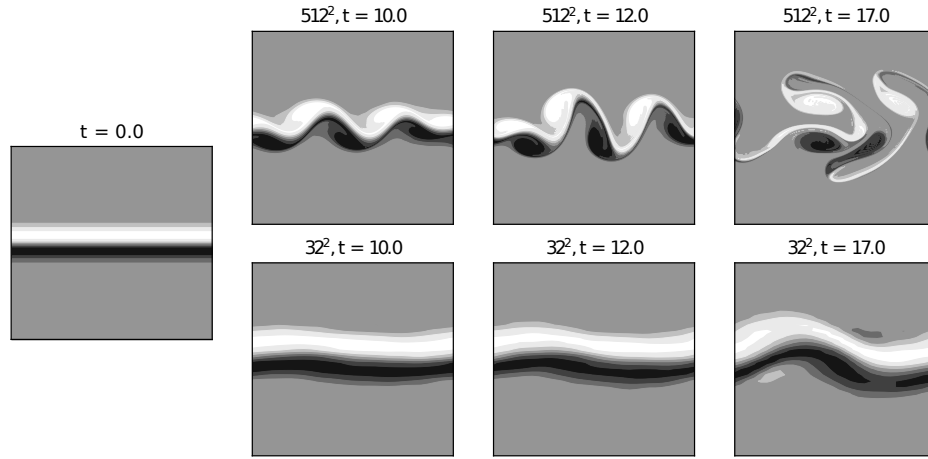


Рисунок 4.3 — Завихренность в различные моменты времени. Эталонная модель ( $512^2$ ) сверху, грубая модель ( $32^2$ ) снизу. Отрицательные значения черным, положительные белым.

различных реализаций внешнего воздействия  $\mathbf{F}$  показаны на рис. 4.3. Стохастическое воздействие возбуждает неустойчивые моды, которые экспоненциально растут до  $t \approx 10.0$  (в эталонной модели), после чего происходит переход к режиму турбулентности. В грубой модели ( $32^2$ ) рост неустойчивости замедлен, поскольку наиболее развитой оказывается более крупномасштабная мода с меньшим инкрементом нарастания. Заметим, что модель вихревой вязкости (МВВ) сильно сглаживает струйное течение.

На рисунке 4.4 приведена энергия флуктуаций (а) и энергия неустойчивых мод (b-d) в % от начальной энергии струи. При повышении разрешения приведенные статистически характеристики сходятся.

Сначала опишем результаты для эталонной модели ( $512^2$ ). Наблюдаемые инкременты нарастания энергии для неустойчивых мод совпадают с теоретическими. Смещение по вертикали участка линейного роста (в логарифмическом масштабе) определяется мощностью внешнего воздействия приходящейся на неустойчивую моду (см. формулу (4.21)). В момент перехода к турбулентному режиму наиболее развитыми оказываются вторая и третья моды, имеющие максимальный инкремент.

Модели грубого разрешения ( $32^2, 64^2$ ) демонстрируют заниженный уровень энергии флуктуаций, см. рис. 4.4 (а). Это объясняется замедлением роста второй и третьей мод, см. рис. 4.4 (с, d). Рассмотрим две причины замедления: воздействие модели вихревой вязкости (МВВ) и численные ошибки аппроксимации. Для того чтобы исключить влияние МВВ, проведен расчет с невязкой жидкостью, красная линия на рисунках. Из рисунков следует, что решающую



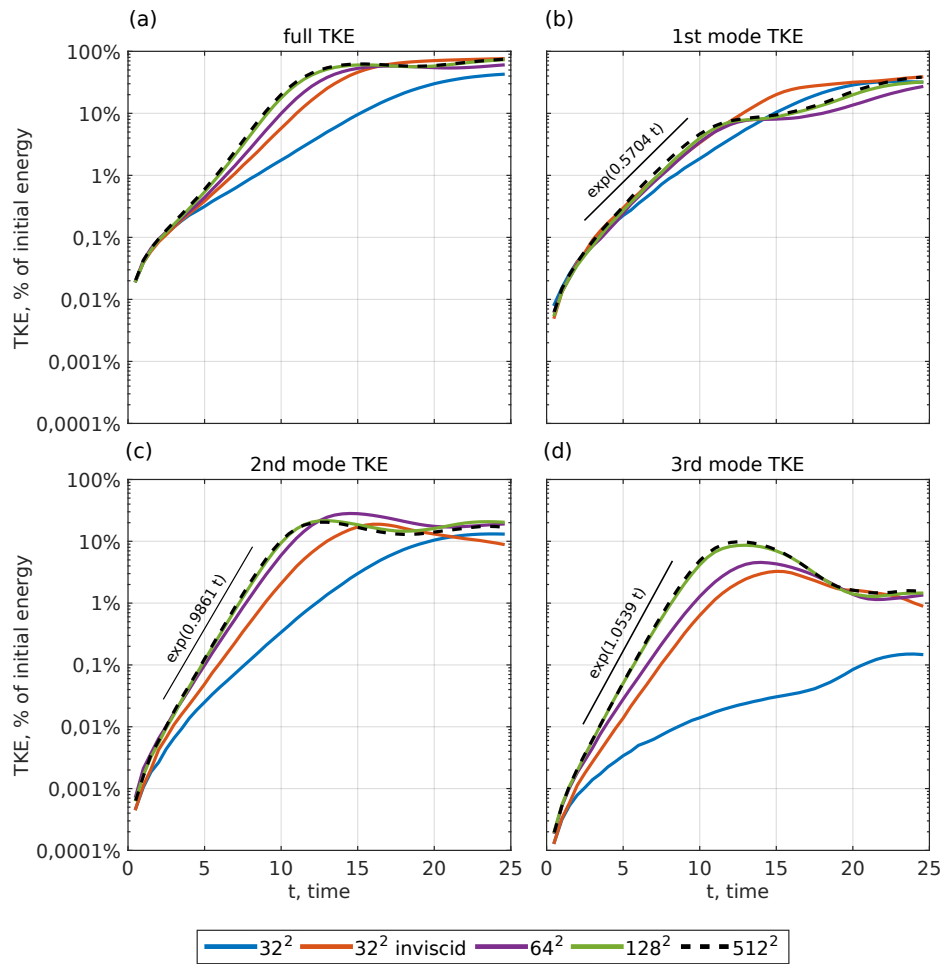


Рисунок 4.4 — Кинетическая энергия флуктуаций (а) и энергия неустойчивых мод  $k_x = 1, 2, 3$  соответственно (b), (c), (d), в % от начальной энергии струи.

Красная линия соответствует расчету при разрешении  $32^2$  с выключенной турбулентной вязкостью.

роль в замедлении роста играет модель вихревой вязкости, которая может воздействовать на систему двумя способами: сглаживать среднее течение и модифицировать линеаризованную систему. Дополнительные эксперименты с линеаризованной моделью показали, что сглаживание среднего течения имеет решающее значение.

### 4.3 Модели подсеточной двумерной турбулентности

#### 4.3.1 Модель отрицательной вязкости

Согласно [69], рассмотрим добавку в правую часть уравнения (4.1):

$$\mu(t)\Delta\mathbf{u}, \quad (4.22)$$

где  $\mu(t) < 0$  выбирается на каждом шаге по времени таким образом, чтобы скомпенсировать диссипацию энергии моделью вихревой вязкости  $\mathbf{D}$ :

$$\int \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega + \mu(t) \int \Delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = 0. \quad (4.23)$$

Поскольку операторы вихревой вязкости и ОПКЭ обладают различным пространственным масштабом, совместное их использование позволяет перераспределять кинетическую энергию разрешаемых течений в более крупные масштабы, при этом свойство диссипации энтропии в коротковолновом участке спектра сохраняется. Исследование корректности по Адамару для совместной параметризации приведено в приложении В.

#### 4.3.2 Стохастическая модель

На каждом шаге по времени генерируются два случайных поля с равномерным распределением на  $(0,1)$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ . Из каждого поля вычитается пространственное среднее, после чего вычитается дивергентная часть. Затем применяется пространственный фильтр 6 раз, определенный в формуле (3.13) с параметром  $a = 1/6$ . Пространственная фильтрация стохастической тенденции предлагалась в работах [73; 85]. Такое количество применений фильтра позволяет выбрать масштаб максимума спектральной плотности приблизительно равным 5 шагам сетки. Обозначим через  $(\hat{s}_1, \hat{s}_2)$  стохастическую тенденцию после всех приведенных операций.

Амплитуда стохастического воздействия  $A$  выбирается таким образом, чтобы скомпенсировать диссипацию:

$$\int \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega + |\Omega| \frac{A^2 \Delta t}{2} \langle \tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2 \rangle = 0, \quad (4.24)$$

где  $|\Omega| = 4\pi^2$  – площадь области.

### 4.3.3 Модель подобия масштабов

Модель подобия масштабов (scale-similarity, SS) имеет вид:

$$- C_{sim} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j \right), \quad (4.25)$$

где  $\widetilde{(\cdot)}$  обозначает одно применение фильтра (3.13) с параметром  $a = 1/6$ ,  $C_{sim} = 3$ .

### 4.3.4 Сравнительный анализ параметризаций

В отличие от предыдущей главы, где каждое подсеточное замыкание моделировало средний приток энергии от ОПКЭ, в данной задаче параметризации воздействуют на среднее течение и флуктуации по-разному.

Стохастическая модель не модифицирует среднее течение и линеаризованную систему, но возбуждает неустойчивые моды, то есть увеличивает предэкспоненциальный множитель в формуле (4.21). Тем не менее, происходит возбуждение множества мод, не развитых в исходной постановке задачи.

Модель отрицательной вязкости, как и модель вихревой вязкости, воздействует преимущественно на среднее течение. Энергия возвращается в среднее течение, в результате чего предотвращается его диссипация.

Модель подобия масштабов не влияет на среднее течение, поскольку (4.25) равно нулю для зонального течения  $u_i = U(y)\delta_{i,1}$ , где  $\delta_{i,j}$  – символ Кронекера. Однако модель модифицирует линеаризованную систему и, как будет показано в численных экспериментах, увеличивает инкременты нарастания энергии неустойчивых мод.

#### 4.4 Численные эксперименты

На рисунках используются следующие обозначения: "bare" – модель без дополнительной подсеточной параметризации, "neg.visc" – модель отрицательной вязкости, "SS" – модель подобия масштабов, "negvisc+SS" – комбинация модели отрицательной вязкости и модели подобия масштабов, "stoch" – стохастическая параметризация.

Результаты для модели  $32^2$  с параметризациями показаны на рисунке 4.5. Параметризации отрицательной вязкости и подобия масштабов позволяют увеличить инкременты роста энергии 2-й и 3-й неустойчивых мод схожим образом. Нарастание 1-й моды лучше воспроизводится моделью с параметризацией подобия масштабов. Поскольку эти параметризации воздействуют на среднее течение и флуктуации по-разному, их можно применять совместно. Комбинированная модель (neg.visc + SS) существенно увеличивает полную энергию флуктуаций и энергию 1-й и 2-й мод, тем не менее, 3-я мода по-прежнему остается недостаточно развитой. Как следует из рисунка 4.6, пространственная структура течения для комбинированной модели значительно ближе к данным эталонной модели, чем для модели без параметризаций (сравнить с рис. 4.3). В частности, в решении наблюдаются более мелкомасштабные флуктуации, и переход к турбулентному режиму течения наступает раньше.

Результаты для модели с разрешением  $64^2$  показаны на рисунке 4.7. Детерминистические модели (neg.visc, SS, neg.visc. + SS) практически не изменяют энергию 1-й и 2-й мод. Воспроизведение 3-й моды значительно улучшается моделями, основанными на модели подобия масштабов (SS, neg.visc + SS). Как видно из рис. 4.7 (b-d), для стохастической параметризации не наблюдается изменение инкрементов роста неустойчивых мод, а график роста энергии мод смещается по вертикальной оси (т.е., происходит модификация предэкспоненциального множителя в уравнении (4.21)). Этот эффект позволяет приблизить наступление турбулентного режима течения, однако при этом возбуждается множество мод, не развитых в эталонном решении, см. полную энергию флуктуаций на рисунке 4.7 (a). При разрешении  $32^2$  этот эффект проявляется еще сильнее. В результате можно заключить, что мощность стохастической параметризации, настраиваемой по количеству диссипируемой энергии, оказывается слишком большой для данного эксперимента.

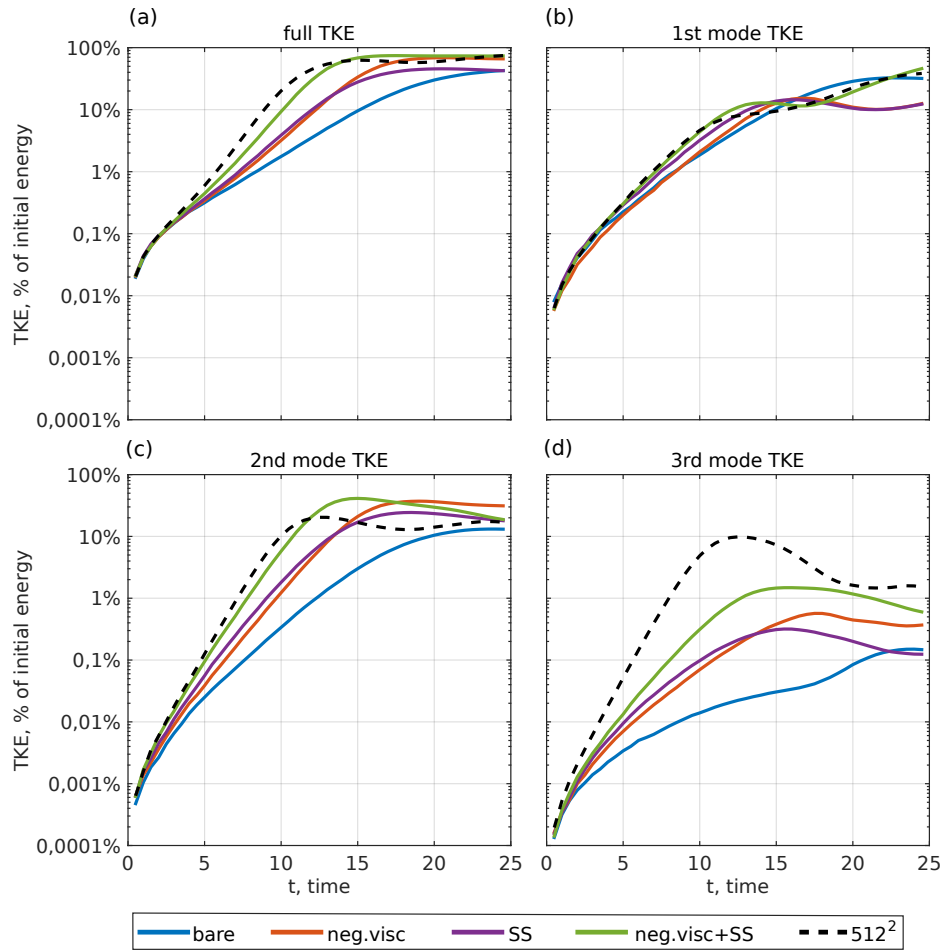


Рисунок 4.5 — Кинетическая энергия флуктуаций (а) и энергия неустойчивых мод  $k_x = 1, 2, 3$  соответственно (b), (c), (d), в % от начальной энергии струи.

Результаты показаны для моделей при разрешении  $32^2$ . Черная линия — эталонный расчет для модели с разрешением  $512^2$ .

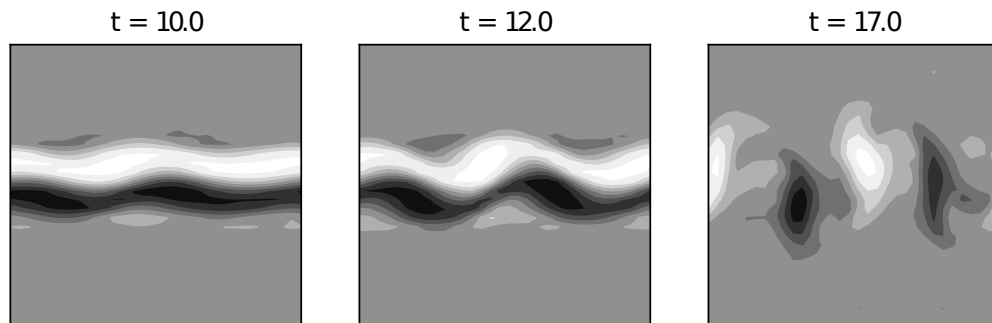


Рисунок 4.6 — Завихренность в различные моменты времени. Модель при разрешении  $32^2$  с комбинированной (neg.visc. + SS) параметризацией. Отрицательные значения изображены черным, положительные — белым.

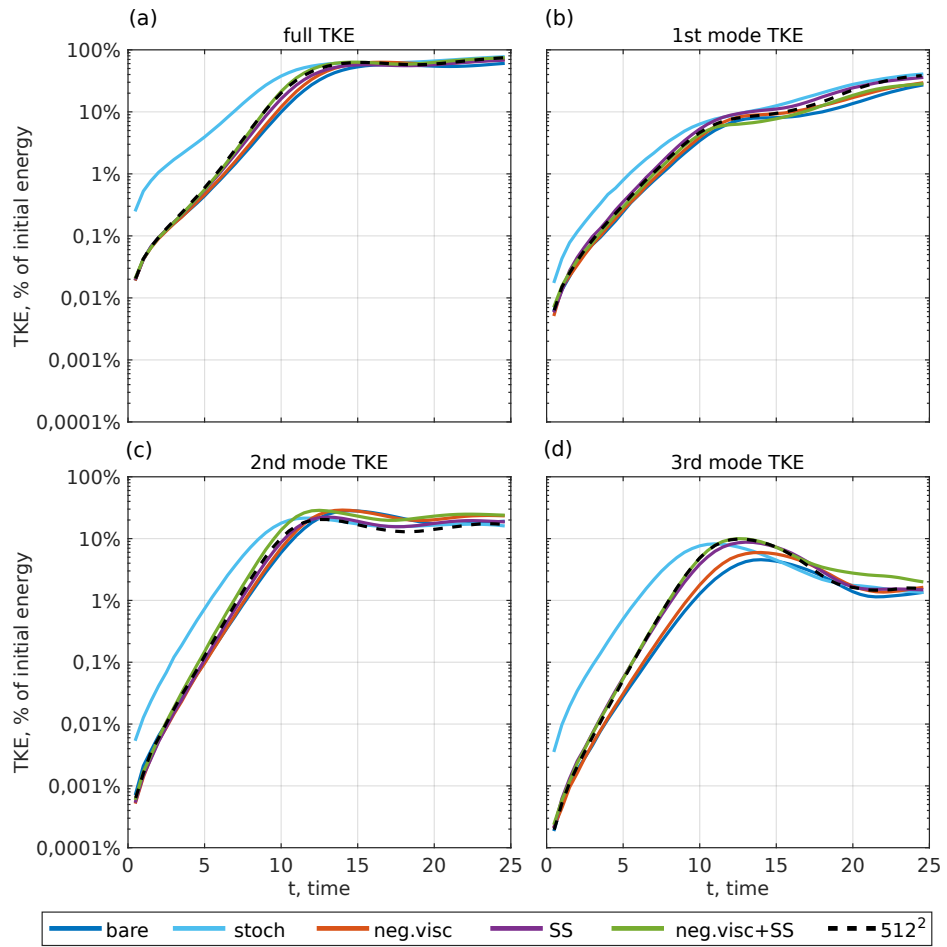


Рисунок 4.7 — Аналогично рисунку 4.5, но для разрешения  $64^2$ .  
 Дополнительная голубая линия соответствует стохастической  
 параметризации.

## 4.5 Выводы

Баротропная неустойчивость воспроизводится грубыми моделями неверно: возбуждаются более крупномасштабные неустойчивые моды, чем в эталонном расчете. Основной причиной подавления мелкомасштабных мод является сглаживание среднего течения моделью вихревой вязкости. Показано, что подсеточные параметризации, которые в предыдущей главе были настроены для моделирования ОПКЭ, могут применяться в задаче с сильным средним течением. Три параметризации (стохастическая тенденция, модель отрицательной вязкости, модель подобия масштабов) по-разному воздействуют на среднее течение и флуктуации в задаче моделирования баротропной неустойчивости.

Стохастическая модель возбуждает неустойчивые моды, но не меняет среднее течение и линеаризованную систему. Она способна приблизить момент наступления турбулентности, однако мощность такой параметризации оказывается завышенной.

Модель отрицательной вязкости способствует сохранению энергии среднего течения, что препятствует его сглаживанию моделью вихревой вязкости. Этот эффект приводит к увеличению инкрементов роста неустойчивых мод, в результате чего приближается момент наступления турбулентности.

Модель подобия масштабов модифицирует линеаризованную систему, что приводит к увеличению инкрементов роста неустойчивых мод, в результате чего приближается момент наступления турбулентности.

Модели отрицательной вязкости и подобия масштабов могут использоваться совместно, поскольку независимо воздействуют на среднее течение и флуктуации, соответственно.

## Глава 5. Подсеточные параметризации в модельной конфигурации Double Gyre в модели океана NEMO

Большая часть кинетической энергии океанических течений представлена вихревой кинетической энергией [10]. "Вихредопускающие" модели океана лишь частично разрешают масштаб бароклинной неустойчивости (внутренний радиус деформации Россби), в результате чего плотность кинетической энергии оказывается заниженной на всех масштабах по сравнению с вихреразрешающими моделями [107]. В приведенной работе выделено две основные причины недостаточной развитости мезомасштабных вихрей: ослаблено преобразование доступной потенциальной энергии в кинетическую и ослаблен обратный каскад кинетической энергии. Как показано в главе 3, параметризации ОПКЭ способны восстановить перераспределение кинетической энергии в крупные масштабы. Кроме того, как показано в главе 4, подсеточные параметризации могут быть полезны для воспроизведения струйных течений, которые наблюдаются в океанической циркуляции.

В данной главе рассмотрены параметризации ОПКЭ в примитивных уравнениях океана на основе модели NEMO [86]. В качестве модельной конфигурации выбрана конфигурация Double Gyre. Для улучшения динамики вихредопускающей модели (при разрешении  $1/4^\circ$ ) построены две параметризации: отрицательной вязкости и стохастическая параметризация. Обе параметризации модифицируют уравнение на эволюцию горизонтальной компоненты импульса. Параметризации относятся к классу "energetically consistent КЕВ", т.е. компенсируют диссипацию, вызванную бигармонической вязкостью. Локальный баланс между генерацией и диссипацией для параметризации отрицательной вязкости достигается с помощью введения дополнительного уравнения на подсеточную кинетическую энергию [83], а для стохастической параметризации – за счет домножения стохастической тенденции на корень из локальной диссипации энергии [78]. Исследование корректности по Адамару для параметризации отрицательной вязкости приведено в приложении В. В данной главе показано, что такие параметризации способны восстановить вихревую активность, в частности, количество вихревой кинетической энергии и вихревой поток тепла. Также обнаружены улучшения в средних полях: темпе-



ратура поверхности океана и функция тока меридиональной опрокидывающей циркуляции.

В данной главе свободные параметры параметризаций выбираются таким образом, чтобы добиться максимального соответствия между вихредопускающей и вихреразрешающей моделями. Спектральный анализ построенных параметризаций и сопоставление со спектральными характеристиками подсчетных сил приведены в следующей главе диссертации.

## 5.1 Конфигурация Double Gyre

Таблица 5 — Параметры моделей R1 (вихреразрешающая), R4 (вихредопускающая), R9 (вихреразрешающая). Турбулентная диффузия в модели R1 действует вдоль изонейтрального направления. Все остальные операторы диффузии и вязкости – горизонтальные.

	R1	R4	R9
$n_x \times n_y \times n_z$	$30 \times 20 \times 30$	$120 \times 80 \times 30$	$270 \times 180 \times 30$
шаг сетки	$1^\circ, 106 \text{ км}$	$1/4^\circ, 26.5 \text{ км}$	$1/9^\circ, 11.7 \text{ км}$
шаг по времени	120 мин	30 мин	800 с
диффузия	$\nabla_h^2, 10^3 \text{ м}^2/\text{с}$	$\nabla_h^4, -10^{10} \text{ м}^4/\text{с}$	$\nabla_h^4, -10^9 \text{ м}^4/\text{с}$
вязкость	$\nabla_h^2, 10^5 \text{ м}^2/\text{с}$	$\nabla_h^4, -5 \cdot 10^{11} \text{ м}^4/\text{с}$	$\nabla_h^4, -5 \cdot 10^{10} \text{ м}^4/\text{с}$

Мы используем модель океана NEMO (версия 3.6) [86] в конфигурации Double-Gyre, которая описана в [137]. Расчетная область прямоугольная с плоским дном. Используются декартовы координаты  $x, y, z$ , направленные вдоль бассейна, поперек и вверх, соответственно. Размеры расчетной области вдоль этих направлений следующие:  $L_x \times L_y \times L_z = 3180 \text{ км} \times 2120 \text{ км} \times 4 \text{ км}$ . Центр расчетной области соответствует  $\sim 30^\circ N$ , при этом расчетная область повернута на  $45^\circ$  по отношению к зональному направлению. Отметим, что метрические слагаемые, соответствующие сферической геометрии, отсутствуют. В широтно-долготных координатах расчетная область показана на рисунке 5.1.

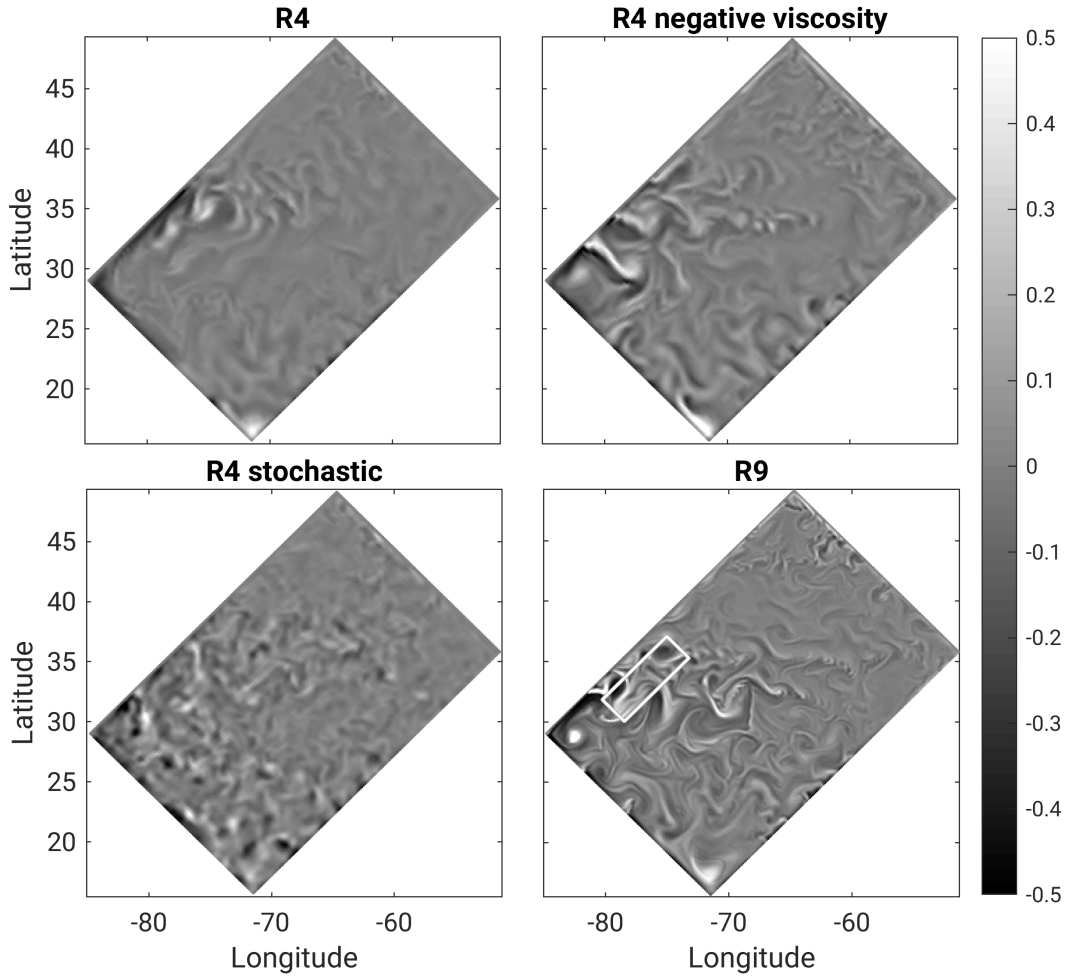


Рисунок 5.1 — Мгновенное поле относительной завихренности в единицах параметра Кориолиса ( $f$ ). 30 марта после разгона модели. R4 – вихредопускающая модель, R9 – вихреразрешающая модель, R4 negative viscosity и R4 stochastic – вихредопускающие модели с ОПКЭ параметризациями. Цветовая шкала насыщается при значениях  $\pm 0.5$ . Белый квадрат объясняется на рисунке 5.10.

Модель основана на примитивных уравнениях океана (векторы обозначены полужирным шрифтом):

$$\frac{dT}{dt} = F_T, \quad \frac{dS}{dt} = F_S, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t} + \text{adv}_h + \text{cor}_h = -\frac{1}{\rho_0} \nabla_h p + \mathbf{F}_{\mathbf{U}_h}, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -H \nabla_h \bar{\mathbf{U}}_h, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (5.4)$$

$$\rho = \rho_0(1 - a(T - T_0) + b(S - S_0)), \quad (5.5)$$

где  $T, S, \mathbf{U}, \eta, \rho, p$  – температура, соленость, вектор трехмерной скорости, уровень свободной поверхности, плотность и давление;  $\mathbf{U}_h$  – горизонтальная часть скорости, а  $\bar{\mathbf{U}}_h$  – её вертикальное осреднение.  $F_T, F_S, \mathbf{F}_{\mathbf{U}_h}$  – внешние воздействия и физические параметризации, в том числе горизонтальная и вертикальная турбулентные вязкость и диффузия. Лагранжева производная обозначается через  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)$ . Оператор Набла задается следующим образом  $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ , а его горизонтальная часть –  $\nabla_h = (\partial_x, \partial_y)$ . Точные выражения для адвекции и силы Кориолиса ( $\text{adv}_h$  и  $\text{cor}_h$ ) даны в работе [86]. Для адвекции скаляров и импульса соответственно применяются TVD схема и схема, сохраняющая энергию, в векторно-инвариантной форме, см. [86]. В нашей конфигурации уравнение на свободную поверхность (5.3) и уравнение состояния (5.5) являются линейными. Параметры уравнения состояния следующие:  $\rho_0 = 1026 \text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$ ,  $a = 2 \cdot 10^{-4} \text{К}^{-1}$ ,  $b = 7.7 \cdot 10^{-4} \text{psu}^{-1}$ ,  $T_0 = 10 \text{C}^\circ$ ,  $S_0 = 35 \text{psu}$ . Для силы Кориолиса используется приближение бета-плоскости,  $\beta = 1.8 \cdot 10^{-11} \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ . Горизонтальные граничные условия следующие: свободное проскальзывание (относительная завихренность равна нулю на границе), нулевые потоки тепла и солености через горизонтальную границу. Придонное трение описывается квадратичным законом.

На свободной поверхности заданы следующие граничные условия. Зональный ветер имеет максимальную скорость на восток при широте  $36^\circ N$  и максимальную скорость на запад при  $22^\circ N$ . Поток тепла из атмосферы в океан выражается формулой  $Q = \gamma (T_{atm} - T_{SST})$ , где  $T_{SST}$  и  $T_{atm}$  – приповерхностная температура океана и атмосферы соответственно,  $\gamma = 40 \text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}$ . Также заданы поток солнечной радиации и поток свежей воды ("fresh water flux"). Приведенные внешние воздействия зависят от широты и сезона, и приведены в [137]. Внутренний радиус деформации Россби равен 50 км на юге и 15 км на севере.

Мы рассматриваем модели при трех равномерных пространственных разрешениях. Параметры экспериментов даны в таблице 5. Начальное поле скорости в модели R1 нулевое, а температура и соленость имеет вертикальный профиль, применяемый во всей расчетной области [137]. Сначала модель R1 запускается на 1000 лет, затем расчет продолжается в моделях R4 и R9 на 120 лет. Последние 20 лет используются для анализа статистических характеристик решения. Горизонтальные диффузия и вязкость представлены либо оператором Лапласа ( $\nabla_h^2$ ), либо бигармоническим оператором ( $\nabla_h^4$ ), вид оператора и соответствующий коэффициент даны в таблице 5. Коэффициенты диффузии и

вязкости в моделях R1 и R9 взяты из работы [137], а в модели R4 соответствуют достаточно развитому вихревому переносу тепла. Как будет показано ниже, значительное изменение этих коэффициентов в модели R4 приводит к нарушению меридионального переноса.

## 5.2 Подсеточные параметризации

### 5.2.1 Модель отрицательной вязкости

Данная параметризация дополняет бигармоническую вязкость в уравнении (5.2) дополнительным слагаемым в форме вязкости с отрицательным коэффициентом, которое возвращает энергию, как предложено в [69]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t} = \dots \nu_4 \nabla_h^4 \mathbf{U}_h + \nabla_h (\nu_2 \nabla_h \mathbf{U}_h). \quad (5.6)$$

Здесь предполагается, что оператор  $\nabla_h$  действует на вектора покомпонентно. Коэффициенты вязкости имеют следующие знаки:  $\nu_4 = \text{const} < 0$ ,  $\nu_2(x, y, z, t) \leq 0$ . Поскольку операторы вихревой вязкости и ОПКЭ обладают различным пространственным масштабом, совместное их использование позволяет перераспределять кинетическую энергию разрешаемых течений в более крупные масштабы, при этом свойство диссипации энтропии в коротковолновом участке спектра сохраняется. Для того чтобы учесть пространственную неоднородность моделируемой турбулентности и слабую динамику вблизи дна, мы следуем работам [79; 80; 83] и вводим зависимость коэффициента отрицательной вязкости от координат  $x, y, z$ . Коэффициент  $\nu_2$  выбирается таким образом, чтобы сбалансировать диссипацию, связанную с бигармонической вязкостью. Потоки энергии в подсеточные масштабы, относящиеся к бигармонической вязкости и модели отрицательной вязкости, соответственно:

$$\dot{E}_{diss} = \nu_4 \nabla_h \mathbf{U}_h \cdot \nabla_h (\nabla_h^2 \mathbf{U}_h), \quad (5.7)$$

$$\dot{E}_{back} = \nu_2 \nabla_h \mathbf{U}_h \cdot \nabla_h \mathbf{U}_h. \quad (5.8)$$

Потоки записаны в галилеево-инвариантной форме. Интегрально по области, данные потоки имеют следующие знаки:  $\int \dot{E}_{diss} dx dy dz > 0$ ,  $\int \dot{E}_{back} dx dy dz \leq 0$ .

Локальное приравнивание данных потоков,  $\dot{E}_{diss}(x,y,z,t) + \dot{E}_{back}(x,y,z,t) = 0$ , приводит к некорректной задаче на поиск  $\nu_2$ , если  $|\nabla_h \mathbf{U}_h| = 0$ . Для преодоления этой проблемы, в работах [79; 83] предложено ввести уравнение на подсеточную кинетическую энергию ( $e \equiv e(x,y,z,t)$ ), которая генерируется за счет диссипации ( $\dot{E}_{diss}$ ) и расходуется на ОПКЭ ( $\dot{E}_{back}$ ):

$$\frac{de}{dt} = c_{diss} \dot{E}_{diss} + \dot{E}_{back} + \nu_e \nabla_h^2 e. \quad (5.9)$$

Здесь  $d/dt$  – лагранжева производная (с учетом адвекции подсеточной энергии разрешаемым течением), которая реализована в коде с помощью простейшей противопотоковой схемы ("upwind") [86], диффузия подсеточной энергии  $\nu_e = 1000 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$  равна вихревой диффузии в модели R1. В отличие от [79], мы применяем лагранжеву производную вместо частной. Использование лагранжевой производной для моделирования распространения подсеточной энергии впервые было предложено в работе [138] и, на наш взгляд, более детально описывает этот процесс. Тем не менее, эксперименты с выключенной адвекцией  $e$  дают схожие результаты. Как и в работе [80], вводится настраиваемый параметр  $c_{diss} \in (0,1)$ , который позволяет уменьшать количество возвращаемой энергии. Оптимальное его значение в модели R4 следующее:  $c_{diss} = 0.8$ . Дальнейшее увеличение приводит к завышенному меридиональному вихревому потоку тепла на поверхности в точке отрыва пристеночного течения. Подсеточная кинетическая энергия  $e$  задает коэффициент отрицательной вязкости согласно следующей формуле:

$$\nu_2 = -c_{back} \Delta x \sqrt{\max(e, 0)}, \quad (5.10)$$

где  $\Delta x$  – шаг сетки и  $c_{back} = 0.4\sqrt{2}$ , как предложено в работе [83]. Несмотря на то что  $\int \dot{E}_{diss} dx dy dz > 0$ , локальные значения  $\dot{E}_{diss}$  могут быть отрицательными, что локально может приводить к отрицательным значениям подсеточной энергии. Введение функции  $\max(\cdot, \cdot)$  выключает ОПКЭ параметризацию в таких точках расчетной области. Для операторов  $\nabla_h(\nu_2 \nabla_h \mathbf{U}_h)$  в (5.6) и  $\nu_e \nabla_h^2 e$  в (5.9), применяются граничные условия Неймана:  $(\nabla_h \mathbf{U}_h) \cdot \mathbf{n} = 0$  и  $(\nabla_h e) \cdot \mathbf{n} = 0$ ,  $\mathbf{n}$  – вектор, ортогональный горизонтальной границе.

Как и в работе [83], мы замечаем, что результаты расчетов слабо зависят от выбора следующих параметров в уравнении на подсеточную кинетическую энергии:  $c_{back}$ ,  $\nu_e$ . Как будет показано в следующем разделе, настройка стохастической параметризации может быть проведена без введения дополнительного уравнения на подсеточную энергию.

### 5.2.2 Стохастическая параметризация

Сначала построим квази-баротропную (т.е. квазидвумерную) функцию тока, как предложено в работе [78]:

$$\psi(x, y, z, t^n) = \varphi(x, y, t^n) \cdot A(x, y, z, t^n), \quad (5.11)$$

где  $\varphi(x, y, t^n)$  – дискретный пространственно-временной белый шум с распределением  $N(0,1)$ , т.е. в каждой точке пространственной сетки и на каждом временном слое,  $t^n$ , реализации случайной величины являются независимыми.  $A$  – амплитуда, задающая пространственное распределение притока энергии. Функция тока  $\psi$  модифицирует уравнение (5.2) следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t} = \dots + \alpha \nabla_h^\perp S^{n_s}(\psi), \quad (5.12)$$

где  $\nabla_h^\perp = (-\partial_y, \partial_x)$ ,  $\alpha$  будет определена позже. Оператор  $S^{n_s}(\cdot)$  обозначает  $n_s$  применений пространственного дискретного фильтра:

$$S(\psi) = \psi + \frac{(\Delta x)^2}{8} \nabla_h^2 \psi. \quad (5.13)$$

Данный фильтр основан на операторе Лапласа, который уже имеется в модели и зануляет шахматную моду  $((-1)^{i+j}; i$  и  $j$  – индексы сетки вдоль  $x$  и  $y$ ), если используется стандартная аппроксимация второго порядка. Оператор Лапласа применяется с нулевыми граничными условиями. В отличие от [85], мы генерируем случайную функцию тока, а не случайный тензор Рейнольдса. Использование функции тока дает аналогичный спектр по волновым числам, но при этом не требует вычитания дивергенции результирующих сил [139]. Фильтр  $S^n(\cdot)$  определяет радиус корреляции стохастической тенденции. Как и в предыдущей главе, используется значение  $n_s = 6$ , которое обеспечивает корреляционный радиус, равный нескольким шагам сетки.

Согласно работе [129], генерация энергии белым по времени шумом пропорциональна квадрату амплитуды, и поэтому  $A$  выбирается следующим образом для того, чтобы скомпенсировать диссипацию, связанную с бигармоническим оператором:

$$A(x, y, z, t^n) = \sqrt{\max(\dot{E}_{diss}, 0)}. \quad (5.14)$$

Наконец, мы находим параметр  $\alpha$  на каждом шаге по времени исходя из равенства интегральных потоков энергии:

$$\frac{\alpha^2 \Delta t}{2} \int \langle |\nabla_h^\perp S^{m_s}(\psi)|^2 \rangle dx dy dz = c_{diss} \int \dot{E}_{diss} dx dy dz. \quad (5.15)$$

Здесь  $\Delta t$  – шаг по времени, а угловые скобки  $\langle \cdot \rangle$  обозначают осреднение по ансамблю реализаций случайного поля  $\varphi$ . Левая часть уравнения (5.15) может быть оценена аналитически, производя интегрирование по спектру волновых чисел [78], но точное выражение для произвольного поля  $A$ , зависящего от пространственных координат, получить невозможно. Мы предлагаем пренебречь ансамблевым осреднением:

$$\int \langle |\nabla_h^\perp S^{m_s}(\psi)|^2 \rangle dx dy dz \approx \int |\nabla_h^\perp S^{m_s}(\psi)|^2 dx dy dz, \quad (5.16)$$

где правая часть рассчитывается по текущей реализации случайного поля  $\varphi$ . Таковую замену можно сделать, поскольку стандартное отклонение интеграла составляет 7% от его среднего по ансамблю значения. Оптимальное значение  $c_{diss}$  равняется 1, в отличие от 0.8 для параметризации отрицательной вязкости. Увеличение количества возвращаемой энергии можно объяснить тем, что часть энергии переходит в инерционные волны (как будет показано ниже), которые диссипируются численным фильтром, применяемым к уравнению на свободную поверхность [86].

### 5.3 Результаты

Модель в конфигурации Double Gyre воспроизводит западное приграничное течение (Western Boundary Current, WBC). На некоторой широте WBC отрывается от границы и распространяется в зональном направлении, разделяя северный и южный круговороты. Широта, на которой происходит отрыв течения, сильно зависит от пространственного разрешения и смещается на юг по мере появления на вычислительной сетке мезомасштабных и субмезомасштабных вихрей [137]. Положение точки отрыва WBC связано с такими характеристиками, как температура поверхности океана (SST) и уровень свободной поверхности (SSH), поскольку изолинии данных характеристик проходят вдоль струйного течения.

Ниже мы рассмотрим 4 модели: вихредопускающая R4, вихреразрешающая R9, и вихредопускающая модель с двумя ОПКЭ параметризациями: R4 negative viscosity и R4 stochastic. Все модели разгоняются, как описано в разделе 5.1.

### 5.3.1 Вихревая кинетическая энергия

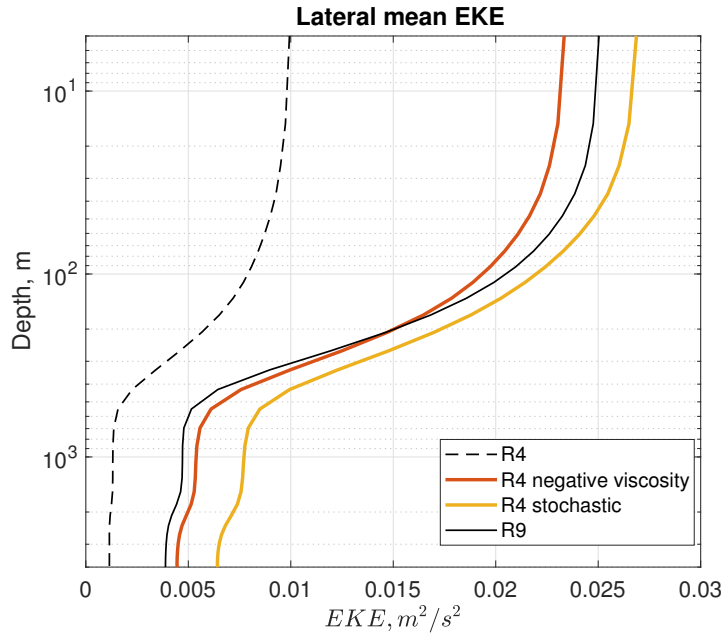


Рисунок 5.2 — Средняя за 20 лет вихревая кинетическая энергия (ЕКЕ), осредненная по горизонтали, как функция глубины,  $\text{m}^2 \cdot \text{c}^{-2}$ . Сравнение вихредопускающих (R4, R4+ОПКЭ) и вихреразрешающей (R9) моделей.

Оценим вихревую активность по уровню вихревой кинетической энергии (Eddy Kinetic Energy, ЕКЕ,  $\langle \mathbf{U}'_h{}^2 \rangle / 2$ , где  $\mathbf{U}'_h$  – отклонение от среднего за двадцать последних лет течения  $\langle \mathbf{U}_h \rangle$ ). Применение ОПКЭ параметризаций позволяет увеличить осредненную по горизонтали ЕКЕ в вихредопускающей модели приблизительно до уровня ЕКЕ в вихреразрешающей модели (R9), см. рисунок 5.2. В отличие от полученных в работе [80] результатов, где удалось восстановить вертикальный профиль по всей глубине, мы обнаружили завышение уровня ЕКЕ на глубине более 200 метров. Пространственное распределение приповерхностной ЕКЕ показано на рисунке 5.3 цветом. Обе параметризации



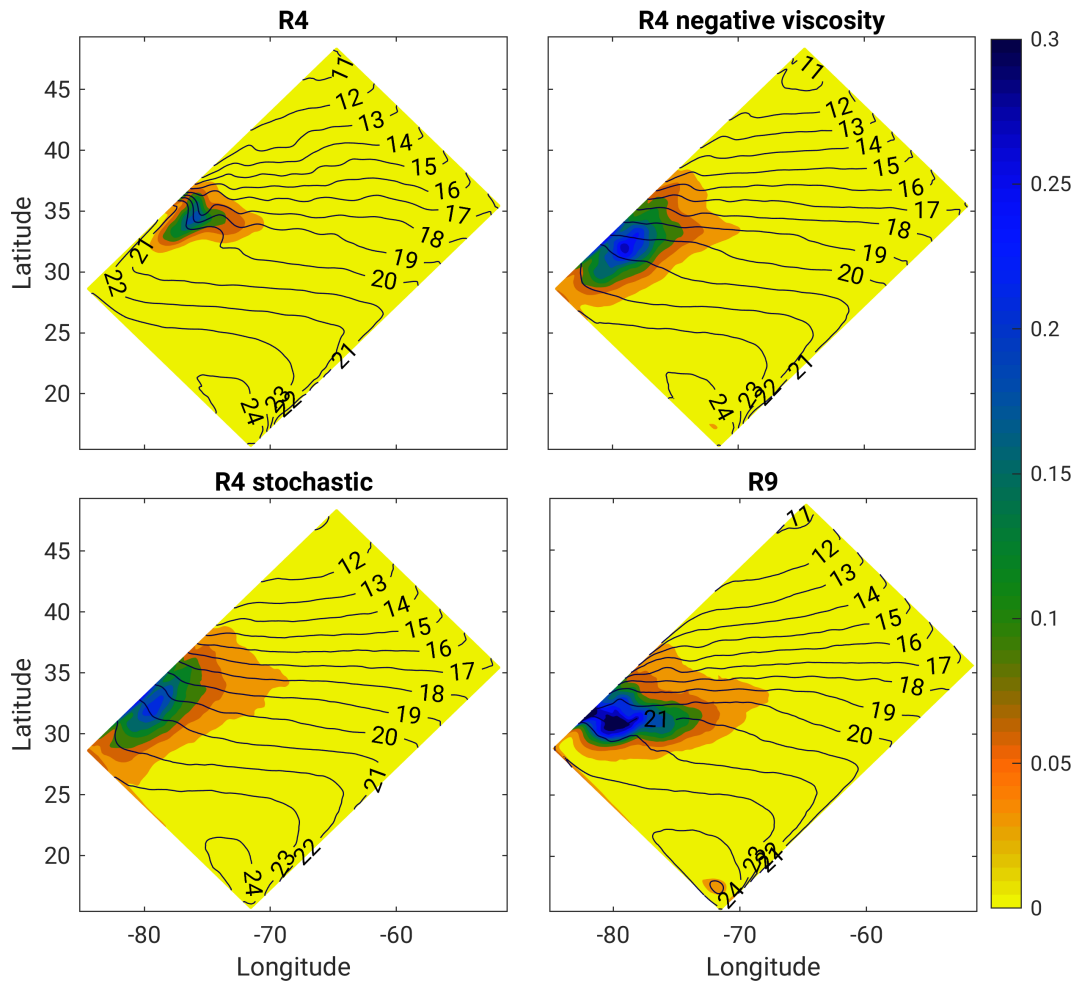


Рисунок 5.3 — Цветом: средняя за 20 лет приповерхностная вихревая кинетическая энергия (ЕКЕ),  $\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$ . Цветовая шкала насыщается при значении  $0.3 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$ . Контурами: средняя за 20 лет температура поверхности океана (SST),  $^{\circ}\text{C}$ .

ОПКЭ приводят к смещению области с максимальным значением поверхностной ЕКЕ на юг, что согласуется с моделью высокого разрешения. Однако, мы отмечаем, что поверхностная ЕКЕ в грубых моделях с ОПКЭ параметризациями вытянута вдоль границы, в отличие от удлинения в зональном направлении в модели R9. Это означает, что распространение струйного течения в зональном направлении не может быть воспроизведено грубой моделью даже после применения ОПКЭ параметризаций.

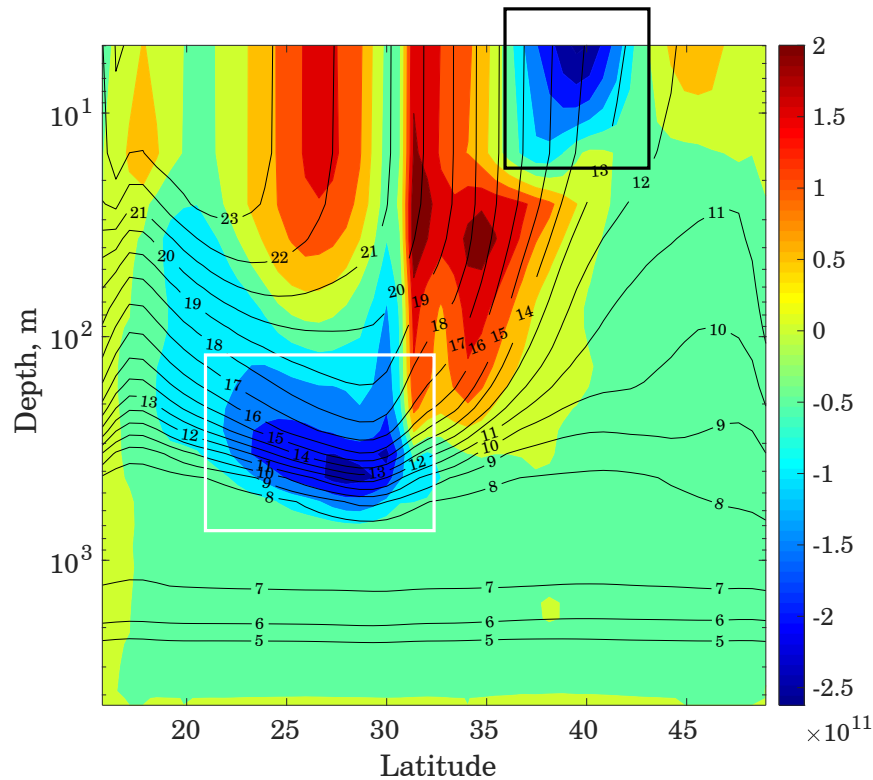


Рисунок 5.4 — Цветом: средний за 20 лет меридиональный вихревой поток тепла, проинтегрированный в зональном направлении,  $\text{Вт} \cdot \text{м}^{-1}$ . Контурами: средняя за 20 лет зонально-осредненная температура,  $^{\circ}\text{C}$ . Модель R9. Черным прямоугольником выделен сильный противогradientный поток тепла. Белым прямоугольником выделен сильный gradientный поток тепла, направленный на юг.

### 5.3.2 Вихревой поток тепла

Замечание: часто под "противогradientным" потоком тепла понимается поток тепла *вдоль* gradientа температуры, т.е. от холодного к теплому [140]. В данном разделе мы придерживаемся аналогичной терминологии. "Противогradientный поток" – от холодного к теплому, "gradientный поток" – от теплового к холодному.

Одной из наиболее важных характеристик вихревой активности является явно воспроизводимый *горизонтальный* вихревой поток тепла. Вихревой поток тепла связан с преобразованием доступной потенциальной энергии среднего течения в энергию мезомасштабных вихрей [69].

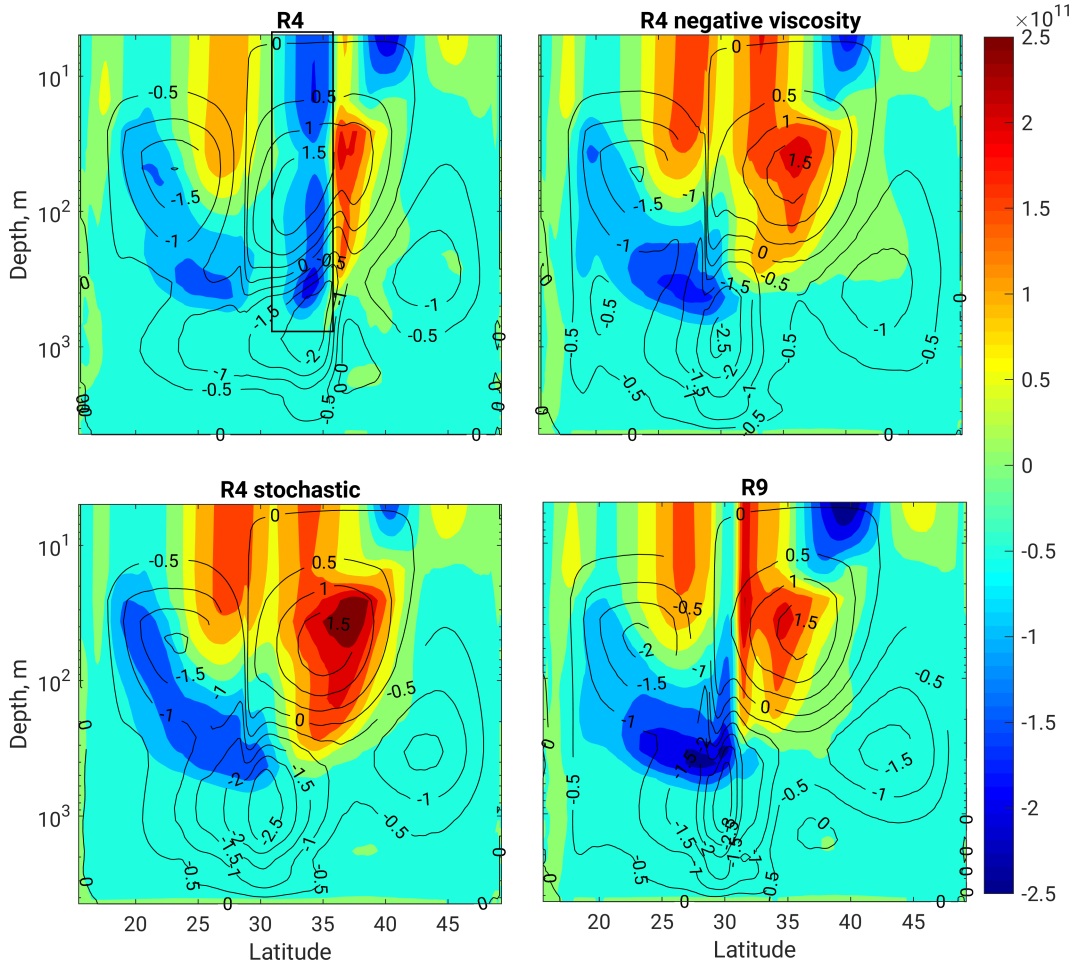


Рисунок 5.5 — Цветом: средний за 20 лет меридиональный вихревой поток тепла, проинтегрированный в зональном направлении,  $\text{Вт} \cdot \text{м}^{-1}$ . Контурами: средняя за 20 лет функция тока опрокидывающей меридиональной циркуляции,  $\Psi_{\text{МОС}}$ , в Свердрупах. Черным прямоугольником выделен ошибочно предсказанный поток тепла на юг в грубой модели.

Определим полный меридиональный поток тепла на север:  $Q = \rho_0 C_p T V$ , где  $C_p \approx 3992 \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{кг}^{-1}$  – теплоемкость и  $V$  – меридиональная скорость; размерность потока следующая,  $[Q] = \text{Вт} \cdot \text{м}^{-2}$ . Заметим, что мы пренебрегаем диффузионным потоком тепла, поскольку его величина мала при использовании бигармонического оператора диффузии. Меридиональный поток тепла состоит из двух частей: перенос средними течениями (Mean Flow Meridional Heat Transport, ММНТ),

$$\rho_0 C_p \langle T \rangle \langle V \rangle, \quad (5.17)$$

где угловые скобки обозначают осреднение по времени за 20 последних лет, и остаток – вихревой поток тепла (Eddy Meridional Heat Transport, ЕМНТ),

$$\rho_0 C_p (\langle TV \rangle - \langle T \rangle \langle V \rangle). \quad (5.18)$$

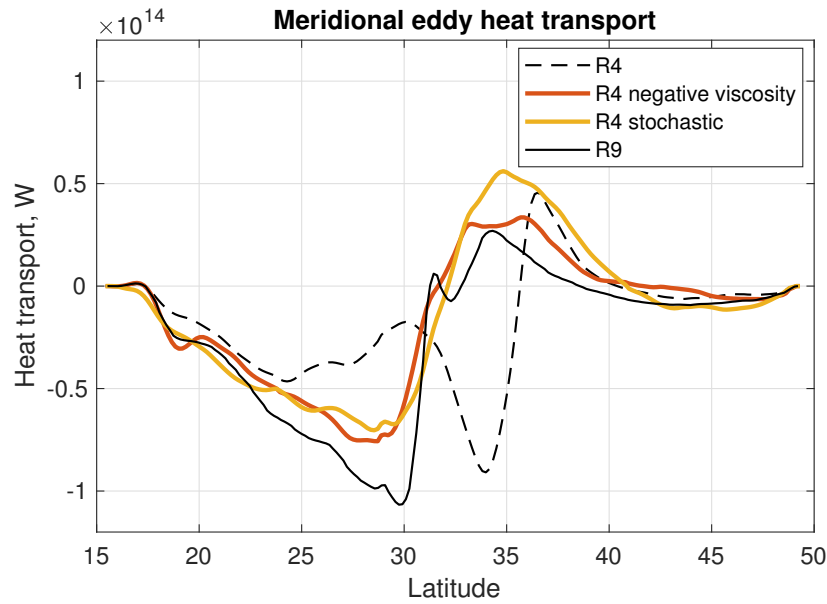


Рисунок 5.6 — Средний за 20 лет вихревой поток тепла, проинтегрированный в зональном направлении и по глубине, Вт.

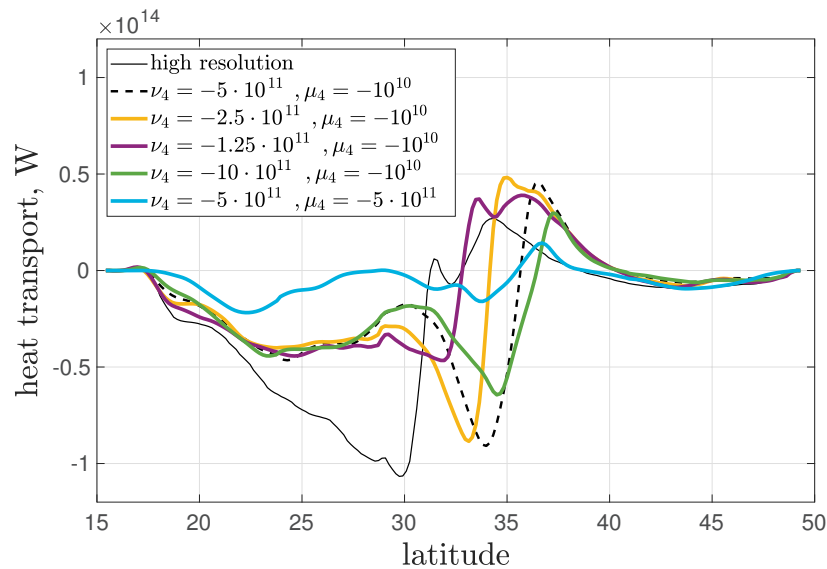


Рисунок 5.7 — Средний за 20 лет вихревой поток тепла, проинтегрированный в зональном направлении и по глубине, Вт. Сплошная черная линия – модель R9, пунктирная линия – R4. Цветные линии соответствуют модели R4 с измененными коэффициентами вихревой вязкости ( $\nu_4$ ) и диффузии ( $\mu_4$ ).

Мы приводим только вихревой поток тепла, который не зависит от единиц измерения температуры,  $C^\circ$  или К. ЕМНТ значительно зависит от пространственного разрешения: он практически равен нулю в модели R1, а при высоких разрешениях сравним с ММНТ [137].

Поскольку северный круговорот холоднее южного, мы ожидаем, что вихревой поток тепла будет направлен на север. Как следует из рисунка 5.4, где

дано распределение ЕМНТ по глубине и изолинии температуры для модели R9, вихревой поток направлен на север (изображено красным) преимущественно в приповерхностном слое глубиной 200 метров. Исключение составляет приповерхностный регион  $37^\circ N - 42^\circ N$ , где возникает сильный противогradientный поток, направленный на юг, см. черный прямоугольник на рисунке 5.4. Наиболее значительный ЕМНТ (отметим логарифмический масштаб глубины) соответствует области 200м – 500м по глубине и  $23^\circ N - 30^\circ N$  по широте, который отмечен белым прямоугольником на рисунке 5.4. Тепло в этой области распространяется на юг, причем поток является gradientным. Эта область определяет знак проинтегрированного по глубине ЕМНТ в южном круговороте, см. рисунок 5.6. В результате применения ОПКЭ параметризаций, увеличивается поток тепла на юг в этой области в грубой модели R4, см. рисунок 5.5, а знак ошибочно предсказанного потока в области  $32^\circ N - 35^\circ N$  изменяется, как и должно быть в модели высокого разрешения, см. черный прямоугольник. Обе параметризации ОПКЭ позволяют сдвинуть на юг положение минимума вихревого потока тепла, проинтегрированного по вертикали, хотя его абсолютное значение оказывается заниженным, см. рисунок 5.6. Также, модели с ОПКЭ параметризациями завышают поток севернее 30-й широты, см. рисунок 5.6. Описанный эффект сдвига экстремального значения потока на юг не может быть достигнут путем изменения коэффициентов бигармонической вязкости ( $\nu_4$ ) или бигармонической диффузии ( $\mu_4$ ), см. рисунок 5.7.

### 5.3.3 Средние поля

Меридиональная опрокидывающая циркуляция (МОС) показана контурами на рисунке 5.5. МОС определяется следующей функцией тока:  $\Psi_{МОС}(y', z) = \int_{-H}^{-z} \langle V(x', y', z', t) \rangle dx' dz'$ , где  $x'$  и  $y'$  – координаты вдоль долготы и широты соответственно,  $z \in (-H, 0)$  – глубина,  $V$  – меридиональная скорость, угловые скобки обозначают осреднение за последние 20 лет. Циркуляция во всех моделях состоит из 4 ячеек, причем наибольшая ячейка расположена у дна (с учетом логарифмического масштаба глубины). Придонная ячейка сдвинута на север в модели R4 по сравнению с моделью R9. Обе ОПКЭ параметризации восстанавливают правильное положение этой ячейки: около 30-й

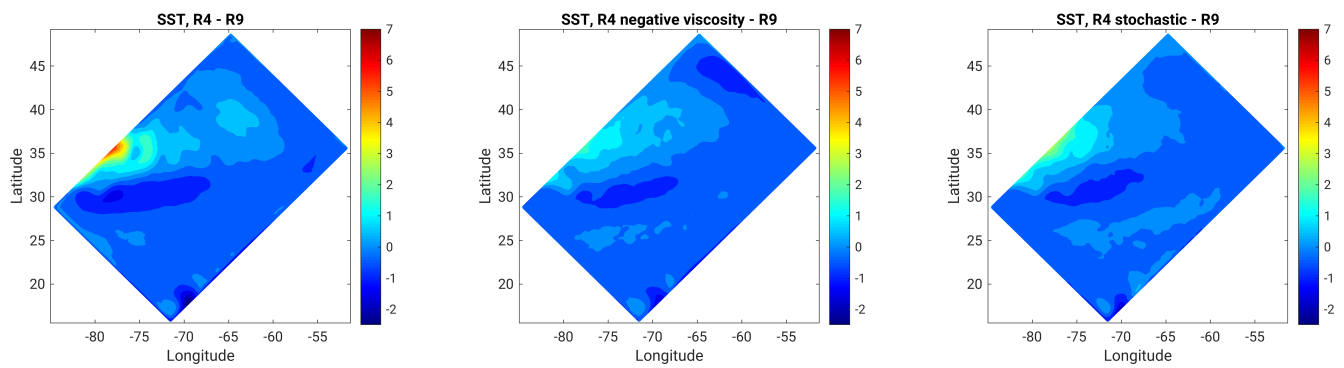


Рисунок 5.8 — Средняя за 20 лет разница в температуре поверхности океана между вихредопускающими (R4, R4+ОПКЭ) и вихреразрешающей R9 моделями,  $^{\circ}\text{C}$ .

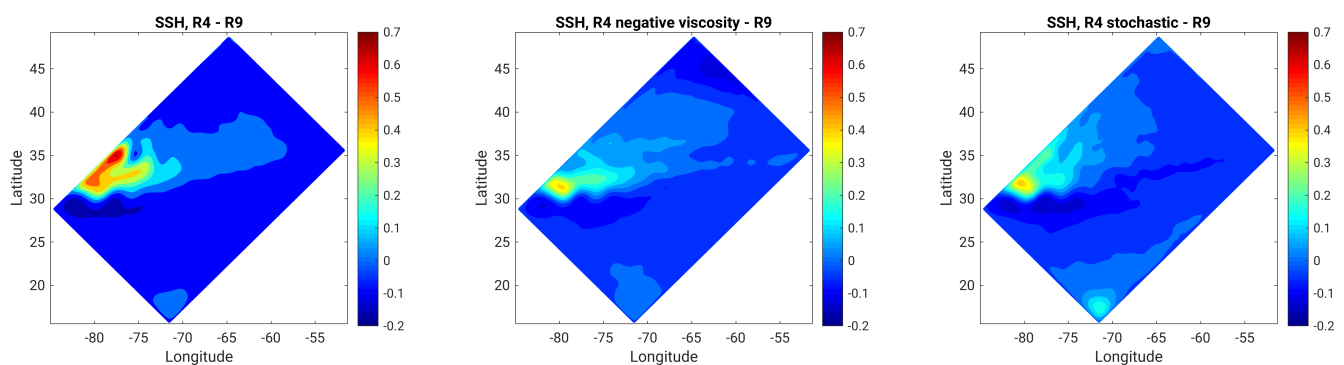


Рисунок 5.9 — Средняя за 20 лет разница в уровне свободной поверхности между вихредопускающими (R4, R4+ОПКЭ) и вихреразрешающей R9 моделями, м.

широты. Северная приповерхностная ячейка приобретает правильную форму в результате применения КЕВ параметризаций. Северная придонная ячейка лучше воспроизводится в модели со стохастической КЕВ параметризацией, по сравнению с моделью с параметризацией отрицательной вязкости: обратить внимание на изолинию  $-1.5$  на рисунке 5.5.

Восстановление вихревой активности и средней циркуляции приводит к улучшению воспроизведения средних приповерхностных полей. На рисунке 5.3 контурами изображена температура поверхности океана для 4 моделей. Основное отличие между R4 и R9 моделями наблюдается в пристеночном регионе, см. изотермы 21 и 22. Применение ОПКЭ параметризаций уменьшает ошибку в приповерхностных полях в этом регионе, смотри рисунки 5.8 и 5.9. Также наблюдается уменьшение нормы ошибок, вычисляемых по всей области, см. таблицу 6.

Таблица 6 — Нормы ошибок в средних за 20 лет температуре поверхности океана, уровне свободной поверхности и поверхностной солёности (SST, SSH, SSS) между грубыми моделями (R4, R4+ОПКЭ) и моделью высокого разрешения (R9). Следующие две нормы для произвольного поля  $\varphi(x,y)$  разделены точкой с запятой:  $\max(|\varphi_{R4} - \varphi_{R9}|)$ ;  $\text{mean}(|\varphi_{R4} - \varphi_{R9}|)$ .

	R4	R4 negative viscosity	R4 stochastic
SST, $C^o$	7.0; 0.4	3.1; 0.3	4.3; 0.27
SSH, м	0.68; 0.062	0.38; 0.039	0.40; 0.040
SSS, psu	0.54; 0.108	0.33; 0.098	0.52; 0.070

### 5.3.4 Временная изменчивость

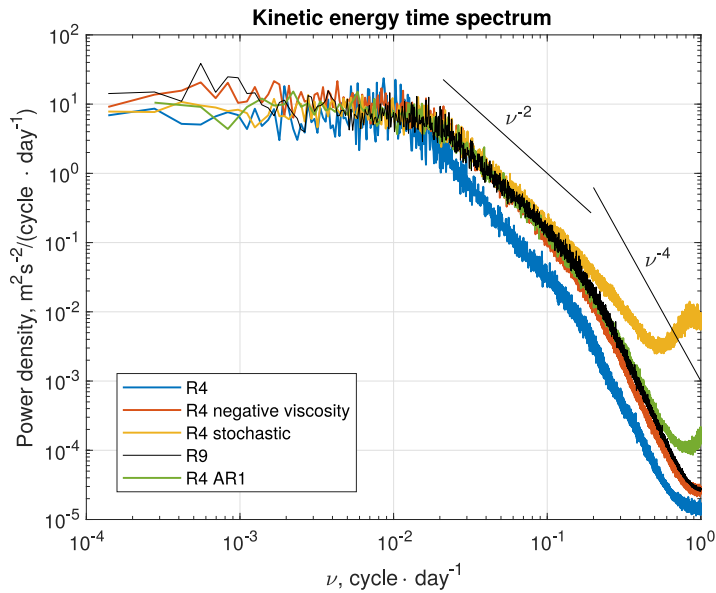


Рисунок 5.10 — Распределение приповерхностной ЕКЕ по спектру временных масштабов. Произведено осреднение спектра по области, ограниченной белым прямоугольником, изображенным на рисунке 5.1. Дополнительная линия "R4 AR1" соответствует стохастической параметризации, скоррелированной по времени.

Мы изучаем временную изменчивость, рассматривая распределение приповерхностной ЕКЕ по спектру временных масштабов, см. рисунок 5.10. Спектральная плотность осреднена по области, ограниченной белым прямоугольником на рисунке 5.1, для того чтобы исключить сильную зависимость от широты отрыва струйного течения. Высокочастотная изменчивость (до 100

дней) характеризуется двумя интервалами спектральной плотности, подчиняющимися степенным зависимостям ( $\nu^{-4}$ ,  $\nu^{-2}$ ). Мы не предоставляем физическое объяснение наблюдаемым интервалам, но предполагаем, что изменение наклона на масштабе 5 дней объясняется тем, что мезомасштабная динамика отсутствует на более мелких временных масштабах. Плотность энергии в обоих степенных интервалах занижена в модели R4. ОПКЭ параметризации позволяют увеличить спектральную плотность на интервале  $\nu^{-2}$  до уровня, соответствующего модели R9. Параметризация отрицательной вязкости также восстанавливает спектральную плотность на интервале  $\nu^{-4}$ . Для стохастической параметризации наблюдается ложный максимум в спектре энергии на масштабе 1 день, предположительно связанный с возбуждением инерционных колебаний, которые имеют близкий период. Ранее нигде не сообщалось о том, что стохастическая КЕВ параметризация с белым шумом по времени может возбуждать инерционные колебания, возможно потому, что в большинстве работ рассматриваются квазигеострофические уравнения (как, например в [69] и [85]), которые исключают наличие инерционных колебаний. Использование скоррелированной по времени стохастической параметризации позволяет избежать возбуждения инерционных волн, см. рисунок 5.10, линия "R4 AR1". Параметризация описана в приложении Г, параметры:  $c_{diss} = 0.8$ ,  $n_s = 6$ , время корреляции  $\tau = 1$  день.

Наконец, рассмотрим мгновенные поля относительной завихренности, см. рисунок 5.1). Решения моделей R4 и R9 значительно отличаются по количеству мезомасштабных вихрей. Обе параметризации ОПКЭ усиливают вихревую активность, но различным способом. Стохастическая параметризация генерирует "синтетическую" турбулентность, которая по своей форме похожа на саму стохастическую тенденцию, а параметризация отрицательной вязкости усиливает уже существующее вихревое поле.



## 5.4 Выводы

В данной главе показано, что параметризации ОПКЭ, компенсирующие диссипацию, связанную с бигармонической вязкостью, могут восстанавливать уровень вихревой активности в вихредопускающей модели океана, основанной на примитивных уравнениях. В частности, увеличивается вихревая кинетическая энергия и восстанавливается вихревой поток тепла. Также улучшения наблюдаются в средних полях: меридиональная опрокидывающая циркуляция, уровень океана и температура поверхности океана. Распространение струйного течения в зональном направлении не удастся воспроизвести с помощью ОПКЭ параметризаций. Стохастическая параметризация ОПКЭ с белым шумом по времени может возбуждать инерционные колебания. Для предотвращения этого эффекта можно использовать скоррелированную стохастическую тенденцию, построенную с помощью авторегрессионной модели.

Хотя исследованные параметризации отличаются по виду тенденции (стохастическая либо детерминистическая) и по наличию уравнения на подсеточную кинетическую энергию, их воздействие на средние характеристики квазидвумерной турбулентности можно считать близким. Аналогичный результат был приведен в главе 3. В связи с этим, мы приходим к выводу, что ключевой характеристикой ОПКЭ параметризации является то, как она перераспределяет кинетическую энергию в крупные масштабы. Для этого процесса можно выделить два ключевых параметра: масштаб возвращения энергии и количество возвращаемой энергии, изучению которых посвящена следующая глава диссертации.

## Глава 6. Спектральные характеристики подсеточных сил и подсеточных параметризаций в модели океана NEMO

В предыдущей главе параметры ОПКЭ параметризаций выбирались таким образом, чтобы добиться максимального соответствия между вихредопускающей и вихреразрешающей моделями океана. Для того чтобы использовать такие параметризации в более реалистичных конфигурациях и при различных разрешениях, необходимо произвести настройку свободных параметров параметризаций, среди которых наиболее существенными являются следующие: *масштаб возвращения энергии* и *количество возвращаемой энергии*. Масштаб возвращения энергии может быть определен, например, следующим образом:

$$\mathcal{L} = (\overline{k^2})^{-1/2}, \quad (6.1)$$

где

$$\overline{k^2} = \frac{\int k^2 B(k) dk}{\int B(k) dk} \quad (6.2)$$

и

$$B(k) = \frac{d}{dk} \int_{|\mathbf{k}| \leq k} \text{Re} \langle \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^* \mathbf{f}_{\mathbf{k}} \rangle d\mathbf{k}, \quad (6.3)$$

– плотность притока энергии от ОПКЭ тенденции на масштабе с модулем волнового числа  $k$ ,  $\mathbf{k}$  – волновой вектор, а  $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$  и  $\mathbf{f}_{\mathbf{k}}$  – преобразования Фурье скорости и ОПКЭ тенденции соответственно,  $*$  – комплексное сопряжение,  $\langle \cdot \rangle$  – осреднение по ансамблю или времени. Для стохастической параметризации с белым шумом по времени следует заменить формулу (6.3) на следующую:  $B(k) = \frac{\Delta t}{2} \frac{d}{dk} \int_{|\mathbf{k}| \leq k} \langle |\mathbf{f}_{\mathbf{k}}|^2 \rangle d\mathbf{k}$ .

Известно множество способов настройки масштаба стохастической параметризации:

1. Параметризации, основанные на предсказании EDQNM теории, [71]. В таких параметризациях либо строится случайный векторный потенциал [73], либо случайный тензор Рейнольдса [68], с белым сеточным шумом по пространству. В таком случае стохастическая тенденция имеет преобразование Фурье  $\mathbf{f}_{\mathbf{k}} \sim k$ , и  $B(k) \sim k^4$  в трехмерной турбулентности [68],  $B(k) \sim k^3$  в двумерной [85].
2. В работе [139] предлагалось из соображений простоты реализации использовать белый сеточный шум в скорости в качестве стохастической

- тенденции,  $\mathbf{f}_k \sim 1$ , что дает в трехмерной турбулентности  $B(k) \sim k^2$ , а в двумерной  $B(k) \sim k$ .
3. В работе [69] использовался белый сеточный шум в завихренности, что дает  $\mathbf{f}_k \sim k^{-1}$  и  $B(k) \sim k^{-1}$  в двумерной турбулентности.
  4. В ансамблевой модели прогноза погоды ECMWF используется случайная функция тока с фурье коэффициентами  $\sim k^{-1.27}$ , что дает  $B(k) \sim k^{0.46}$  [78]. Как будет показано ниже, спектральный наклон  $k^{0.46}$  соответствует спектральной плотности подсеточных сил.
  5. В модели атмосферы грубого разрешения PUMA [141] используется случайная завихренность с Фурье-коэффициентами  $\sim k^{-1.27}$ , что дает  $B(k) \sim k^{-3.54}$ .
  6. Также широко распространена пространственная фильтрация белого шума по пространству, что соответствует рассмотрению несектрального фильтра для разделения масштабов в EDQNM теории [71], однако, в отличие от данной работы, обычно пространственный фильтр применяется один или два раза [73], [85].
  7. В разделе 3.2 главы 3 диссертации было предложено настраивать  $B(k)$  таким образом, чтобы воспроизводить спектр генерации энергии подсеточными силами, который расположен на инерционном интервале обратного каскада энергии.

Большинство приведенных выше способов построения стохастической тенденции приводит либо к генерации энергии вблизи сеточного масштаба (пункты 1, 2, 4, 6), либо на масштабе области (пункты 3, 5). Масштаб параметризации, настроенной согласно пункту 7, задается физическими масштабами задачи, определяющими положение и протяженность инерционного интервала обратного каскада энергии, и таким образом отделен от сеточного масштаба и масштаба области.

Для детерминистической ОПКЭ параметризации также возможна настройка масштаба возвращения энергии:

- В работах [43; 142] исследовались различные тенденции ( $\sigma$ ) в уравнении на завихренность ( $\xi$ ):  $\sigma = \Delta^n \xi$ ,  $n = -1, 0, 1, 2$ ;  $\sigma = \widehat{\xi}$ ,  $\sigma = \xi - \widehat{\xi}$ , где  $\widehat{(\cdot)}$  – пространственный фильтр. Для несектральных схем, наилучшие результаты в ошибках прогноза и затухании энергии и энтрофии были обнаружены для параметризации  $\xi - \widehat{\xi}$ , которая по масштабу совпадает с оператором Лапласа.

- В работе [80] применяется пространственное сглаживание тенденции параметризации отрицательной вязкости.

Заметим, что в отличие от большинства упомянутых выше стохастических ОПКЭ моделей, параметризация отрицательной вязкости преимущественно возвращает энергию не на краях диапазона воспроизводимых масштабов, а в его середине – на масштабе генерации кинетической энергии (в океане такой масштаб соответствует внутреннему радиусу деформации Россби). Если предположить существование двунаправленного каскада энергии-энтропии,

$$E(k) = \begin{cases} C_1 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, & k < k_f, \\ C_2 \eta^{2/3} k^{-3}, & k > k_f, \end{cases} \quad (6.4a)$$

$$(6.4b)$$

то спектр генерации энергии оператором отрицательной вязкости будет иметь вид:

$$B(k) \sim k^2 E(k) = \begin{cases} C_1 \varepsilon^{2/3} k^{1/3}, & k < k_f, \\ C_2 \eta^{2/3} k^{-1}, & k > k_f, \end{cases} \quad (6.5a)$$

$$(6.5b)$$

который имеет максимум на масштабе генерации энергии  $k_f$ .

Количество возвращаемой энергии в двумерной турбулентности обычно выбирается пропорционально вязкой диссипации, т.е.

$$\dot{E}_{back} = c_{diss} \dot{E}_{diss}, \quad (6.6)$$

где коэффициент пропорциональности  $0 \leq c_{diss} \leq 1$  может либо выбираться глобально для всей области (как сделано в предыдущей главе и в работе [69]), либо зависеть от локального числа Россби ( $Ro = \frac{|\xi|}{f}$ ,  $\xi$  – относительная завихренность,  $f$  – локальный параметр Кориолиса,  $Ro_{diss}$  – безразмерный параметр) [80; 82; 143]:

$$c_{diss} = \left( 1 + \frac{Ro}{Ro_{diss}} \right)^{-1}, \quad (6.7)$$

либо быть больше единицы, если в бюджет подсеточной кинетической энергии включить диссипацию доступной потенциальной энергии [144]. Точное значение  $c_{diss}$  невозможно найти по данным априорного анализа подсеточных сил, поскольку, во-первых, от его выбора зависит устойчивость расчета, а во-вторых, поток энергии на прямой и обратный можно разделить различными способами; например, в Фурье-пространстве или в физическом пространстве [145]. Кроме

того, можно предположить, что диссипативная часть подсеточных сил описывается некоторым заданным оператором вихревой вязкости, и определить ОПКЭ как возвращение энергии за счет остаточной части подсеточных сил. В каждом случае коэффициент  $c_{diss}$  будет различным. Тем не менее, если определить  $c_{diss}$  некоторым образом, то можно измерить, как он зависит от разрешения и локальных характеристик турбулентности (числа Россби).

Как следует из приведенного обзора, существует множество способов настройки масштаба и количества возвращаемой энергии в параметризациях ОПКЭ. В данной главе в модели NEMO в конфигурации Double Gyre при высоком пространственном разрешении  $1/24^o$  проведен априорный анализ подсеточных сил и сделана попытка связать характеристики параметризаций ОПКЭ с характеристиками частично разрешаемого на сетке обратного каскада кинетической энергии. В частности, рассмотрен вопрос возможности применения параметризаций в вихреразрешающих моделях, в которых частично разрешен прямой каскад кинетической энергии в субмезомасштабах (1 – 100 км). В заключении главы даются рекомендации по настройке параметризаций ОПКЭ.

## 6.1 Спектральные характеристики модели R24

Таблица 7 — Параметры вихреразрешающих моделей. Параметризации турбулентной диффузии и вязкости действуют в горизонтальном направлении.

	R9	R12	R24
$n_x \times n_y \times n_z$	$270 \times 180 \times 30$	$360 \times 240 \times 30$	$720 \times 480 \times 30$
шаг сетки	$1/9^o$ , 11.7 км	$1/12^o$ , 8.8 км	$1/24^o$ , 4.4 км
шаг по времени	800 сек	600 сек	300 сек
диффузия	$\nabla_h^4$ , $-10^9$ м <sup>4</sup> /с	$\nabla_h^4$ , $-10^9$ м <sup>4</sup> /с	$\nabla_h^4$ , $-10^9$ м <sup>4</sup> /с
вязкость	$\nabla_h^4$ , $-5 \cdot 10^{10}$ м <sup>4</sup> /с	$\nabla_h^4$ , $-1.25 \cdot 10^{10}$ м <sup>4</sup> /с	$\nabla_h^4$ , $-5 \cdot 10^9$ м <sup>4</sup> /с

Использовалась конфигурация модели NEMO, описанная в разделе 5.1. Параметры вихреразрешающих моделей приведены в таблице 7. Расчет с вихреразрешающими моделями проводился на 20 лет со статистически-равновесного

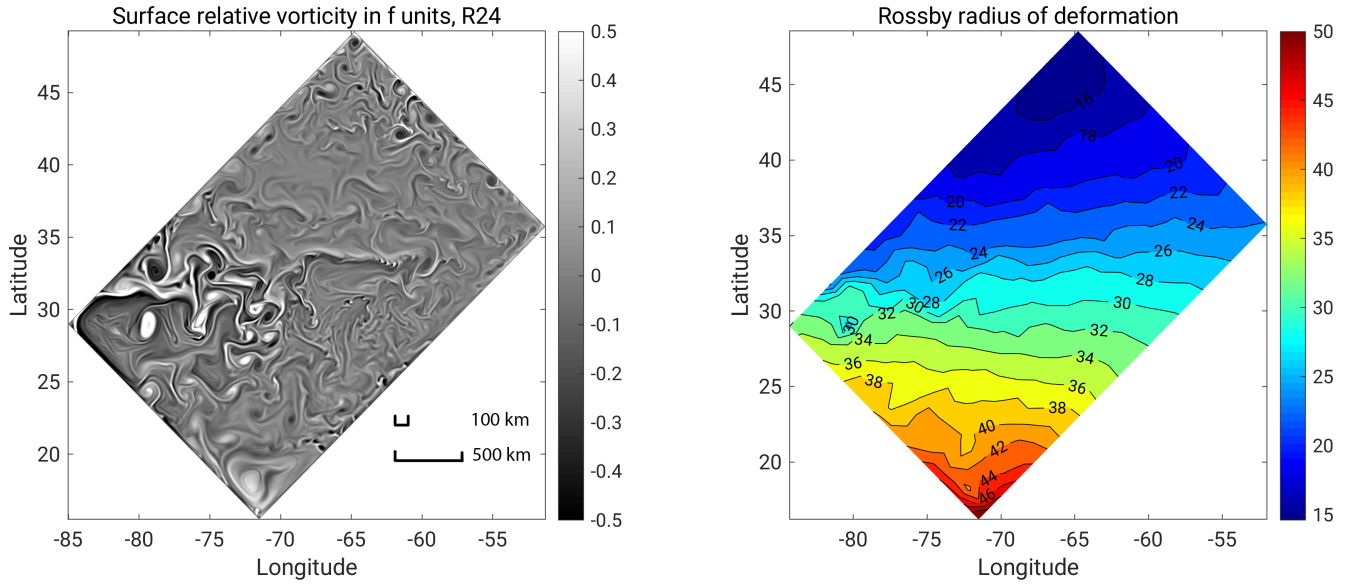


Рисунок 6.1 — Слева: относительная завихренность на поверхности в единицах параметра Кориолиса для модели R24, 30 марта. Цветовая шкала ограничена значениями  $\pm 0.5$ . В действительности диапазон значений:  $(-0.9; 3.7)$ . Справа: внутренний радиус деформации Россби в километрах, по данным 1 января.

состояния модели R9. Для анализа нелинейных взаимодействий использовался один последний год расчета с моделью R24.

Оценим спектральный интервал, на котором должен происходить обратный каскад энергии. Мы предполагаем, что бароклиническая неустойчивость является источником кинетической энергии. Вычислим внутренний радиус деформации Россби,  $L_R = \frac{c_{int}}{f}$  [146], где  $c_{int} = \pi^{-1} \int_{-H}^0 N(z) dz$  – фазовая скорость внутренних гравитационных волн,  $N(z)$  – частота Брента-Вяйсяля,  $f$  – параметр Кориолиса. Фазовая скорость  $c_{int}$  варьируется в следующих пределах: 2 м/с на юге и 1.6 м/с на севере, а параметр Кориолиса  $f$ :  $3.9 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$  на юге и  $1.1 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$  на севере. В результате радиус деформации  $L_R$  варьируется в пределах от 50 км на юге и до 15 км на севере, см. рис. 6.1(b). Радиус деформации определяет минимальную длину волны бароклинической неустойчивости,  $L_{bc} = 2\pi L_R$ , [107]. Получаем, что бароклиническая неустойчивость на юге должна происходить на длинах волн  $L_{bc} \approx 300$  км, а на севере  $L_{bc} \approx 100$  км. Эти длины волн хорошо разрешаются всеми моделями, приведенными в таблице 7.

Поскольку мы наблюдаем сильно анизотропные течения, то предполагаем, что блокировка каскада происходит на масштабе Райнса. Среднеквадратичная горизонтальная скорость в среднем по области и за год в модели R24 составляет  $U_{rms} = 0.13$  м/с, а производная параметра Кориолиса в широтном направле-

нии:  $\beta = 1.8 \cdot 10^{-11} \text{ 1/(\text{мс})}$ . Тогда волновое число блокировки каскада [10],  $k_{rh} = \sqrt{\frac{\beta}{U_{rms}}} \approx 0.012 \text{ км}^{-1}$ , что соответствует длинам волн  $L_{rh} = \frac{2\pi}{k_{rh}} \approx 500 \text{ км}$ . Таким образом, мы ожидаем, что преобразование доступной потенциальной энергии в кинетическую будет происходить в диапазоне длин волн 100 – 300 км, после чего энергия будет перераспределяться в крупные масштабы, порядка 500 км, пока не наступит блокировка каскада волнами Россби. Эти масштабы нанесены на рисунок 6.1(а) для сопоставления с размером вихрей.

Для вычисления пространственных спектров используются дискретные синус-косинус Фурье-преобразования. Тип преобразования выбирается в зависимости от граничных условий на горизонтальную скорость. Пусть  $\mathbf{U}$  – полная трехмерная скорость,  $\mathbf{U}_h$  – горизонтальная компонента скорости, а  $\widehat{(\cdot)}$  – преобразование Фурье по горизонтали. Тогда средняя по глубине *спектральная плотность кинетической энергии*, связанная с горизонтальной скоростью:

$$E_U(k) = H^{-1} \int_{-H}^0 \frac{d}{dk} \int_{|\mathbf{k}| \leq k} \frac{|\widehat{\mathbf{U}}_h|^2}{2} d\mathbf{k} dz, \quad (6.8)$$

$\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ . Нормировка Фурье-преобразования следующая:

$$\int E_U(k) dk = (L_x L_y H)^{-1} \int \frac{|\mathbf{U}_h|^2}{2} dx dy dz. \quad (6.9)$$

*Спектральный приток кинетической энергии* от сил адвекции вычисляется следующим образом:

$$T_N(k) = -H^{-1} \int_{-H}^0 \frac{d}{dk} \int_{|\mathbf{k}| \leq k} \text{Re} \left( \widehat{\mathbf{U}}_h^* (\widehat{\mathbf{U}} \cdot \nabla) \widehat{\mathbf{U}}_h \right) d\mathbf{k} dz. \quad (6.10)$$

Поскольку оператор адвекции сохраняет энергию, то спектральный приток энергии удовлетворяет равенству:  $\int T_N(k) dk = 0$ , а *спектральный поток кинетической энергии* из масштабов  $k' \leq k$  в масштабы  $k' > k$  определяется формулой:

$$\Pi_N(k) = \int_{k' > k} T_N(k') dk'. \quad (6.11)$$

Положительные значения потока соответствуют прямому каскаду энергии через волновое число  $k$  в мелкие масштабы (высокие волновые числа), а отрицательные – обратному. Также введем *спектральный поток относительной энтропии*:

$$\int_{k' > k} T_N(k') k'^2 dk'. \quad (6.12)$$

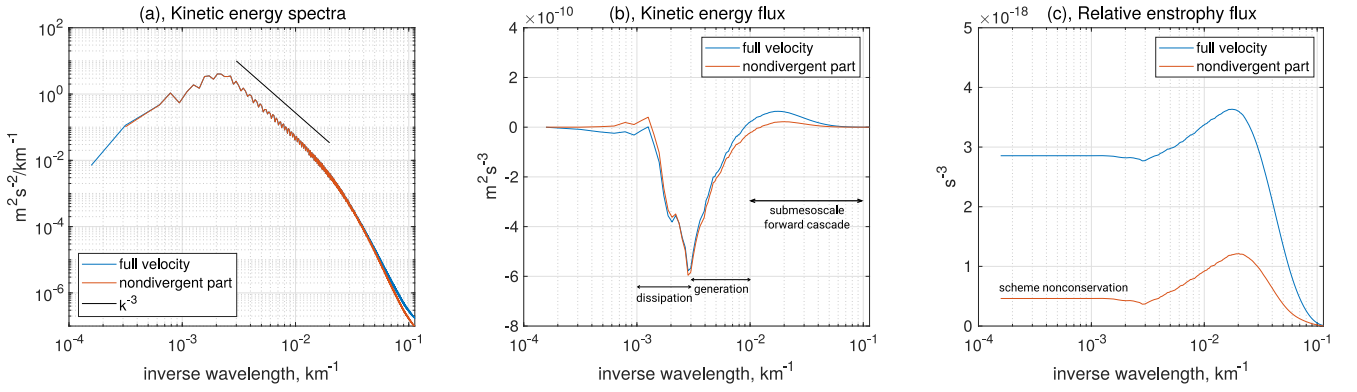


Рисунок 6.2 — (а), спектральная плотность кинетической энергии (6.8). (б), спектральный поток кинетической энергии (6.11). (с), спектральный поток энтропии (6.12). Синяя кривая соответствует полной скорости, а красная — бездивергентной части. Модель R24, осреднение по глубине и за год, Фурье-преобразование соответствует всей области.

На рисунке 6.2 приведены спектральные характеристики модели R24. По характеру нелинейных взаимодействий, можно выделить три спектральных интервала. На длинах волн 100 – 300 км происходит генерация кинетической энергии. Большая часть этой энергии перераспределяется в крупные масштабы, формируя обратный каскад энергии, который блокируется на масштабах 300 – 1000 км, см. рис. 6.2(b). Как и в работах [147], [148], максимум спектральной плотности кинетической энергии приблизительно соответствует масштабу, на котором наблюдается максимальный поток энергии. В интервале генерации наблюдается спектральная плотность кинетической энергии с наклоном  $k^{-3}$ , см. рис. 6.2(a). Хотя теория геострофической турбулентности предсказывает наклон  $k^{-5/3}$  на интервале обратного каскада энергии [10], на практике обычно наблюдается наклон  $k^{-3}$  [69], [107], [148], [149], [150]. По всей видимости, это связано с тем, что интервалы генерации и диссипации энергии не разнесены в Фурье-пространстве, в результате чего фактически отсутствует инерционный интервал обратного каскада энергии, однако, перераспределение энергии в крупные масштабы сохраняется. С другой стороны, наклон  $k^{-3}$  можно объяснить тем, что в области масштабов 100 – 300 км одновременно с обратным каскадом энергии наблюдается прямой каскад энтропии, см. рис. 6.2(c), красная линия.

В субмезомасштабном диапазоне 10 – 100 км практически отсутствует генерация кинетической энергии и наблюдается прямой каскад энергии в мелкие масштабы, см. рис. 6.2(b). Прямой каскад энергии обязательно должен существовать, так как он связан с прямым каскадом энтропии. Тем не



менее, множество работ посвящено свойствам этого каскада [151], [15]. В частности, предполагается, что в субмезомасштабном диапазоне течения становятся геострофически-несбалансированными, и в результате взаимодействия геострофических и агеострофических компонент течения формируется прямой каскад энергии, представленный инерционно-гравитационными волнами. Существование такого каскада показано как в уравнениях Буссинеска, так и в примитивных уравнениях [151]. Самый простой способ оценить вклад агеострофических течений в формирование прямого каскада энергии – это рассмотреть вклад от бездивергентных течений. Из рисунка 6.2(а) видно, что дивергентная компонента скорости модифицирует спектральную плотность энергии в самых мелких масштабах (несколько десятков километров), тем не менее, учет дивергентной компоненты скорости (и вертикальной скорости) приводит к увеличению потока по прямому каскаду энергии в 2.9 раза ("full velocity" по сравнению с "nondivergent part" на рисунке 6.2(b)). Также характерной чертой прямого каскада энергии является генерация энтропии агеострофическими течениями, см. рисунок 6.2(с), синяя линия. Более точный анализ агеострофических течений можно провести с учетом дисперсионного соотношения инерционно-гравитационных волн [151].

## 6.2 Характеристики подсеточных сил

Ниже понадобится определение подсеточных сил. Введем оператор проекции,  $\mathcal{P}$ , с сетки модели R24 на более грубую сетку, который применяется в два этапа. Сначала в окрестности точки грубой сетки производится горизонтальное осреднение по ближайшим точкам модели R24 с равными весами. После чего выполняется сглаживание фильтром (3.12) (при  $a = 1/4$ ) по каждому горизонтальному направлению. Тогда разрешенная на грубой сетке скорость:

$$\mathcal{P}(\mathbf{U}), \quad (6.13)$$

тенденция разрешенной на грубой сетке адвекции:

$$N = -(\mathcal{P}(\mathbf{U}) \cdot \nabla)\mathcal{P}(\mathbf{U}_h), \quad (6.14)$$

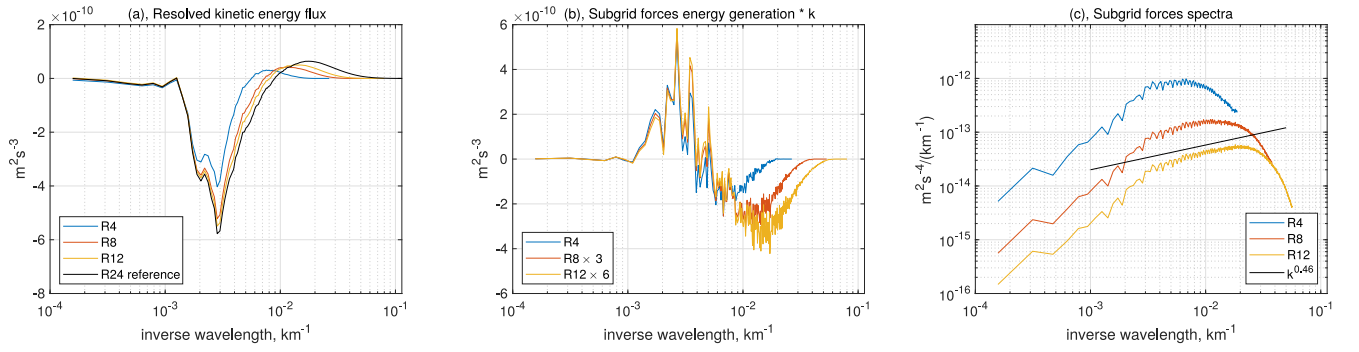


Рисунок 6.3 — (а), разрешаемый на грубой сетке спектральный поток энергии. (б), спектральная плотность притока энергии для подсеточных сил. Притоки при разрешениях R8 и R12 домножены на 3 и 6 соответственно, чтобы совместить графики в крупных масштабах. Приток домножен на волновое число, что позволяет оценить площадь под кривой в логарифмических координатах. (с), спектральная плотность подсеточных сил.

и тенденция неразрешенной на грубой сетке адвекции, т.е. *подсеточные силы*:

$$S = -\mathcal{P}((\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U}_h) + (\mathcal{P}(\mathbf{U}) \cdot \nabla)\mathcal{P}(\mathbf{U}_h). \quad (6.15)$$

Для вычисления оператора адвекции на грубой сетке используется схема в потоковой форме, которая является одной из реализованных в модели NEMO схем. Мы рассмотрим огрубление разрешения до  $1^\circ$  (R1),  $1/4^\circ$  (R4),  $1/8^\circ$  (R8),  $1/12^\circ$  (R12).

Спектральные характеристики (6.10), (6.11) могут быть вычислены для разрешаемой адвекции  $N$  и подсеточных сил  $S$ . На рисунке 6.3 изображены: (а), разрешаемый поток кинетической энергии,  $\Pi_N(k)$ ; (б), приток кинетической энергии от подсеточных сил,  $T_S(k)$ . При огрублении разрешения разрешаемый поток кинетической энергии по обратному каскаду уменьшается, рис. 6.3(а). Для разрешения R4 примерно на 30%, а для разрешения R1 практически отсутствует (не показано на рисунке). Для вихреразрешающих моделей R8 и R12 поток энергии уменьшается незначительно, тем не менее, это результат априорного анализа, и в реальных расчетах поток энергии по обратному каскаду может сильно зависеть от разрешения [107]. Недостаточный спектральный поток энергии при грубом разрешении компенсируют подсеточные силы, которые перераспределяют кинетическую энергию из масштабов меньше 250 км в масштабы больше 250 км, см. рис. 6.3(б). Аналогичный результат уже приводился для однородной двумерной турбулентности (см. главу 3, рисунок 3.1). Спектр генерации энергии подсеточными силами должен использоваться для настройки

длинноволновой параметризации ОПКЭ. Выделим основные свойства спектра генерации:

- Масштаб генерации (больше 250 км) не зависит от разрешения грубой модели и приблизительно соответствует масштабам блокировки обратного каскада энергии.
- Мощность длинноволновой накачки уменьшается при повышении разрешения грубой модели: в 3 и 6 раз при повышении разрешения в 2 и 3 раза соответственно. Заметим, что на рисунке 6.3 притоки для моделей R8 и R12 домножены на 3 и 6 соответственно.
- Отношение возвращаемой ( $T_S(k) > 0$ ) энергии к диссипированной ( $T_S(k) < 0$ ) падает при повышении разрешения. Если оценить коэффициент пропорциональности в формуле (6.6) как

$$c_{diss} = \frac{\int \max(T_S(k), 0) dk}{\int \max(-T_S(k), 0) dk}, \quad (6.16)$$

то получим следующие значения  $c_{diss}$ : 6.2, 1.44, 0.84, 0.6 для разрешений R1, R4, R8 и R12 соответственно. Значения  $c_{diss} > 1$  для моделей R1 и R4 означают, что на "подсеточном" масштабе генерируются вихри, которые затем укрупняются до разрешаемых масштабов. Такие ситуации предлагалось учитывать в работе [144] с помощью включения в бюджет подсеточной энергии вклада параметризации Гента-Маквилльямса. Значения  $c_{diss} < 1$  для разрешений R8 и R12 означают, что в этих моделях начинает разрешаться прямой каскад энергии в субмезомасштабах, и предположение геострофической турбулентности о перераспределении энергии в крупные масштабы нарушается.

Спектральная плотность подсеточных сил  $S$ , вычисленная аналогично (6.8), изображена на рисунке 6.3(с). Наклон спектральной плотности соответствует используемому в работе [78], и равен  $k^{0.46}$ . Максимум спектральной плотности зависит от разрешения и достигается на длинах волн приблизительно 5 шагов сетки. Данный масштаб можно использовать для настройки коротковолновой параметризации ОПКЭ (определение коротковолновой и длинноволновой ОПКЭ параметризаций дано во введении к главе 3).

На рисунке 6.4 приведена зависимость  $c_{diss}$  от локального числа Россби в сравнении с формулой 6.7. Распределение построено по значениям локального

притока энергии от подсеточных сил в галилеево-инвариантной форме:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial \mathcal{P}(u_i)}{\partial x_j} (\mathcal{P}(u_i u_j) - \mathcal{P}(u_i) \mathcal{P}(u_j)), \quad (6.17)$$

тогда

$$c_{diss}(Ro) = \frac{\langle \max(\frac{dE}{dt}, 0) \rangle}{\langle \max(-\frac{dE}{dt}, 0) \rangle} \Big|_{Ro}. \quad (6.18)$$

Осреднение  $\langle \cdot \rangle$  берется по времени и по всем расчетным точкам. В соответствии с формулой (6.7), количество возвращаемой энергии падает при увеличении локального числа Россби, причем на характерном масштабе  $Ro_{diss} \approx 1$ . Именно такое значение использовалась в работе [80]. Поскольку модели с высоким разрешением характеризуются бóльшими значениями завихренности, формула может использоваться для автоматического понижения мощности ОПКЭ параметризации, и таким образом учитывает частично разрешенный прямой каскад энергии в субмезомасштабах, величина которого должна определяться несбалансированностью течения (т.е. локальным числом Россби). Тем не менее, данная формула преимущественно тестировалась в вихредопускающих моделях, и при таком разрешении наибольшая чувствительность к выбору коэффициента  $Ro_{diss}$  наблюдается при наличии сильных пристеночных течений [80; 82]. Понизить мощность параметризации у границ можно и более простыми способами: использовать нулевые граничные условия Дирихле на подсеточную энергию, либо занулять  $c_{diss}$  у границ. Для вихредопускающей модели R4 это позволяет увеличить устойчивость расчета и использовать  $c_{diss} = 1$  вдали от границ (результаты не приведены).

### 6.3 Спектральный анализ подсеточных параметризаций

В предыдущей главе описаны ОПКЭ параметризации: стохастическая (раздел 5.2.2, на графиках "stoch") и отрицательной вязкости (раздел 5.2.1, на графиках "negvisc"). Кроме того, здесь рассмотрены подсеточные силы (на графиках "subgrid"), бигармоническая вязкость (на графиках "blp") и модель подобия масштабов (на графиках "SS", описана в разделе 4.3.3). Параметры ОПКЭ параметризаций при разрешении R4 в предыдущей главе подобраны

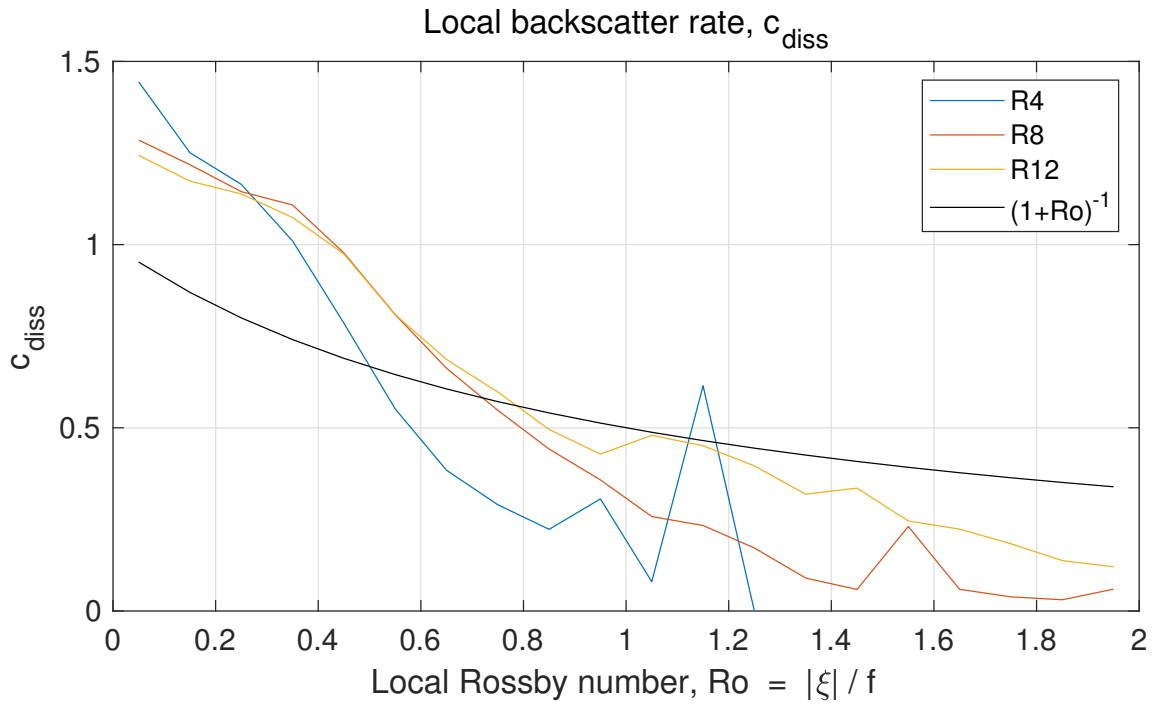


Рисунок 6.4 — Проверка формулы  $c_{diss} = (1 + Ro/Ro_{diss})^{-1}$  для оценки локального количества возвращаемой энергии.

таким образом, чтобы добиться максимального сходства с моделью R9, преимущественно в воспроизведении меридионального вихревого потока тепла. Ниже мы выясним, как соотносятся спектральные характеристики подсеточных сил и подсеточных параметризаций, и свяжем масштабы возвращения энергии с масштабами обратного каскада энергии.

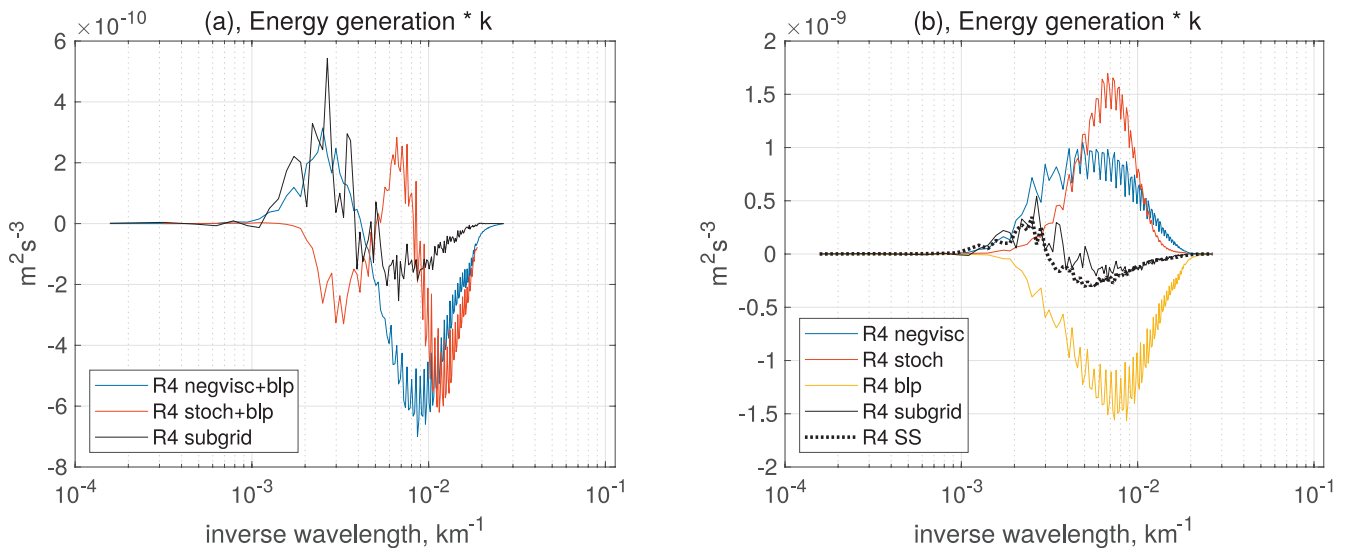


Рисунок 6.5 — Сравнение притока энергии от подсеточных сил ("R4 subgrid") и от моделей подсеточной турбулентности при разрешении R4: (a), ОПКЭ параметризация + бигармоническая вязкость; (b), подсеточные параметризации по отдельности.

На рисунке 6.5(b) изображены спектральные притоки кинетической энергии для ОПКЭ параметризаций (синяя и красная линии). Для обеих ОПКЭ параметризаций бóльшая часть притока энергии наблюдается на масштабах бароклинной неустойчивости, т.е. 100 – 300 км. Если добавить к параметризации отрицательной вязкости диссипацию, связанную с бигармоническим оператором, то характерные масштабы генерации энергии сдвигаются в область длинных волн и приблизительно совпадают со спектром генерации подсеточными силами, см. рисунок 6.5(a) синяя линия. Аналогичная характеристика для стохастической модели, красная линия, может быть скорректирована, если применять бóльшее количество фильтраций к стохастической тенденции. Однако, непосредственное возбуждение масштабов 300 – 1000 км стохастической параметризацией может быть нежелательным, поскольку в этой области нелинейные взаимодействия ослаблены, а течения являются анизотропными. В результате, есть вероятность разрушения крупномасштабных когерентных структур, таких как струйные течения, стохастической параметризацией, как это обсуждалось в главе 4.

Для модели подобия масштабов наблюдаются два спектральных интервала генерации и диссипации энергии, аналогично подсеточным силам, см. рис. 6.5(b), изображено точками. Однако для того чтобы построить ОПКЭ параметризацию на основе этой модели аналогично тому, как это сделано в разделе 3.2.3 главы 3, необходимо отфильтровать тенденцию вплоть до масштабов 300 км, что потребует слишком большого количества применения пространственных фильтров. По этой причине мы не приводим результаты для SS параметризации в модели окна NEMO.

#### **6.4 Метод релаксации для определения характеристик подсеточных параметризаций**

Приведем еще один аргумент в пользу утверждений о том, что возвращение энергии в длинноволновом ОПКЭ должно происходить на масштабах бароклинной неустойчивости и спектр генерации энергии хорошо воспроизводится оператором отрицательной вязкости. Для того чтобы настроить длинноволновый ОПКЭ по спектру притока энергии от подсеточных сил,

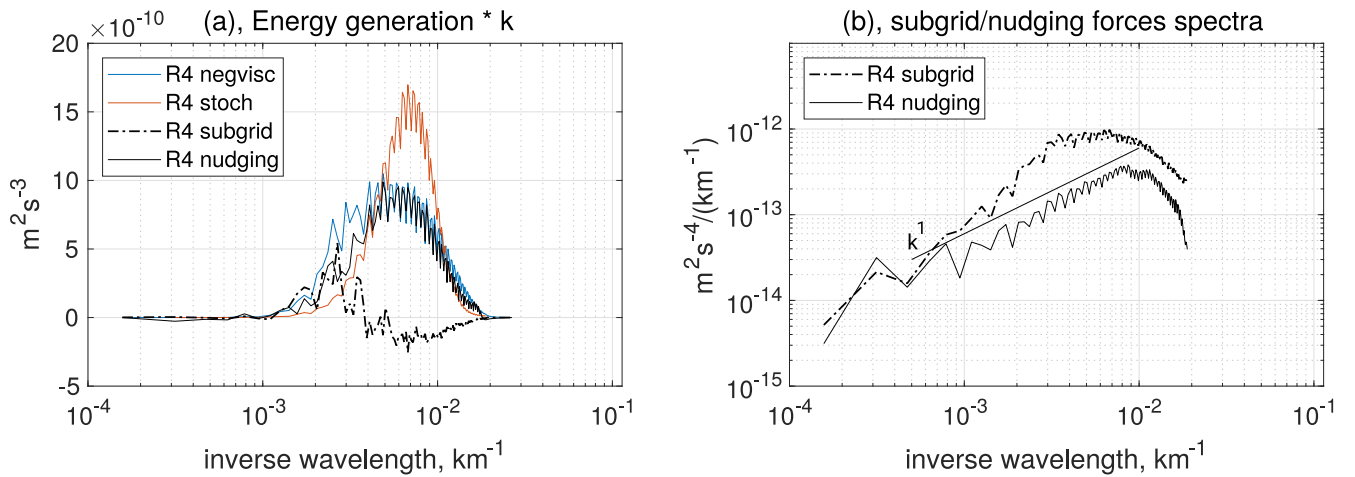


Рисунок 6.6 — (a), приток энергии от подсеточных сил ("R4 subgrid"), релаксации ("R4 nudging") и параметризаций ОПКЭ. (b), спектральная плотность подсеточных сил и релаксации.

необходимо иметь процедуру разделения притока энергии на генерацию и диссипацию. В качестве модели диссипации обычно выбирается вязкость высокого порядка. Однако, как следует из рисунка 6.5(a), диссипация в мелких масштабах в три раза завышена совместной моделью ("negvisc+blp"). Это происходит потому, что коэффициент вязкости обычно выбирается больше, чем тот, который предсказывает априорный анализ подсеточных сил. Наиболее вероятной причиной завышения вязкости является желание подавить дисперсионные ошибки численных схем адвекции в коротковолновом диапазоне. В свою очередь, подсеточные силы, построенные стандартным образом (6.15), компенсируют дисперсионные ошибки численной схемы адвекции, но это никак не учитывается при построении простых параметризаций подсеточной турбулентности. В результате, динамика мелких разрешаемых масштабов в априорном анализе грубой модели и в реальных расчетах сильно отличается.

В связи с этим, можно попробовать изменить методологию проведения априорного анализа. Она должна обладать следующими двумя свойствами:

- Мелкие разрешаемые масштабы грубой модели могут иметь значительные дисперсионные ошибки, но крупные масштабы воспроизводятся верно.
- Характеристики длинноволновой ОПКЭ параметризации могут быть построены при некотором заданном значении бигармонической вязкости, которое можно варьировать в достаточно широком диапазоне значений.

Обоим свойствам можно удовлетворить, если рассмотреть приспособление (также, иногда эту процедуру называют "наджинг" либо "релаксация") модели грубого разрешения к модели высокого разрешения при фиксированном коэффициенте бигармонической вязкости:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_h^c}{\partial t} = \dots + \frac{1}{\tau} (\mathcal{P}(\mathbf{U}_h) - \mathbf{U}_h^c), \quad (6.19)$$

где верхний индекс  $c$  обозначает поля модели грубого разрешения,  $\tau = 1$  день – характерное время релаксации, которые выбирается таким образом, чтобы хорошо воспроизводились мезомасштабные вихри. Если сравнивать это время с характерным временем другого линейного оператора, бигармонической вязкости,  $\tau_{blp} = 1/(\nu_4 k^4)$ , то на длинах волн больше 90 км будет преобладать релаксация, а в коротковолновом диапазоне – вязкость. Особым преимуществом данной процедуры является то, что она учитывает все неточности, присущие модели грубого разрешения, в том числе численные схемы и особенности работы блоков физических параметризаций в полной модели океана при грубом разрешении (например, параметризации верхнего перемешанного слоя).

Использование процедуры релаксации, т.е. правой части уравнения (6.19), для нахождения тенденции неразрешаемых на сетке физических процессов предлагается впервые. Данная тенденция восстанавливает баланс энергии в системе, и может использоваться для нахождения спектра генерации энергии. В недавних работах эту процедуру предлагалось использовать для оценки свободных параметров параметризаций [152], [153]. В этих работах оптимальные значения свободных параметров соответствовали минимальной тенденции релаксации.

Релаксация производилась для модели R4, траектория которой приспособивалась к траектории R9 в течение одного года, где огрубленные поля  $\mathcal{P}(\mathbf{U}_h)$  модели R9 подавались в модель R4 с дискретностью по времени 6 часов. На рисунке 6.6(a) приведен спектр генерации кинетической энергии тенденцией релаксации, подсеточными силами и параметризациями ОПКЭ. Спектр генерации энергии для тенденции релаксации имеет максимум на масштабах бароклинной неустойчивости и хорошо соотносится со спектром генерации для модели отрицательной вязкости. Согласно рисунку 6.6(b), спектральная плотность релаксации меньше, чем у подсеточных сил, вычисленных в априорном анализе стандартным образом. Это может говорить о том, что релаксация, в отличие от



подсеточных сил, не компенсирует дисперсионные ошибки схем в коротковолновом диапазоне (при используемом значении  $\tau$ ).

### 6.5 Параметризация отрицательной вязкости при вихреразрешающем разрешении

По результатам априорного анализа подсеточных сил мы пришли к выводу, что параметризация отрицательной вязкости возвращает энергию на масштабах бароклинной неустойчивости и дополнительной настройки масштаба не требует. Результаты расчетов с параметризацией отрицательной вязкости при разрешениях  $1/4^\circ$ ,  $1/9^\circ$ ,  $1/12^\circ$  и параметре  $c_{diss} = 0.8$  приведены на рисунках 6.7, 6.8. Положительный эффект в интегральном вихревом потоке тепла наблюдается при всех разрешениях в диапазоне  $1/4^\circ - 1/12^\circ$  при сравнении с эталонным расчетом  $1/24^\circ$ , рис. 6.7. В соответствии с результатами априорного анализа, количество возвращаемой энергии  $c_{diss}$  следует уменьшать при повышении разрешения, поскольку оказывается завышенным приповерхностный вихревой поток тепла, см. "R12 negvisc" на рисунке 6.8. Именно по этой характеристике мы выбирали  $c_{diss}$  при разрешении R4 в предыдущей главе. При разрешении R9 коэффициент  $c_{diss} = 0.8$  можно считать приемлемым. Нормы ошибок в средних полях приведены в таблице 8. При разрешениях R4 и R9 применение параметризации отрицательной вязкости приводит к тому, что все нормы ошибок либо уменьшаются, либо остаются прежними. При разрешении R12 практически все нормы ошибок увеличиваются: появляется ошибка в северном регионе в полях температуры и солёности.

### 6.6 Выбор масштаба стохастической параметризации при вихреразрешающем разрешении

В данном разделе предлагается выяснить, должен ли зависеть масштаб возвращения энергии для стохастической параметризации от шага сетки. Исследуется стохастическая параметризация AR1, описанная в приложении Г, для

Таблица 8 — Нормы ошибок в средних за 20 лет температуре поверхности океана, уровне свободной поверхности и поверхностной солёности (SST, SSH, SSS) между грубыми моделями ( $R_c$ ) и моделью высокого разрешения ( $R24$ ). Результаты для параметризации отрицательной вязкости. Следующие две нормы для произвольного поля  $\varphi(x,y)$  разделены точкой с запятой:  $\max(|\varphi_{R_c} - \varphi_{R24}|)$ ;  $\text{mean}(|\varphi_{R_c} - \varphi_{R24}|)$ .

	SST, $C^\circ$	SSH, м	SSS, psu
R4	8.8; 0.54	0.75; 0.1	0.65; 0.16
R4 negvisc	5.3; 0.45	0.63; 0.08	0.45; 0.15
R9	3.8; 0.22	0.6; 0.04	0.37; 0.06
R9 negvisc	2.15; 0.2	0.18; 0.03	0.26; 0.06
R12	2.0; 0.13	0.21; 0.024	0.22; 0.04
R12 negvisc	1.1; 0.17	0.24; 0.03	0.21; 0.06

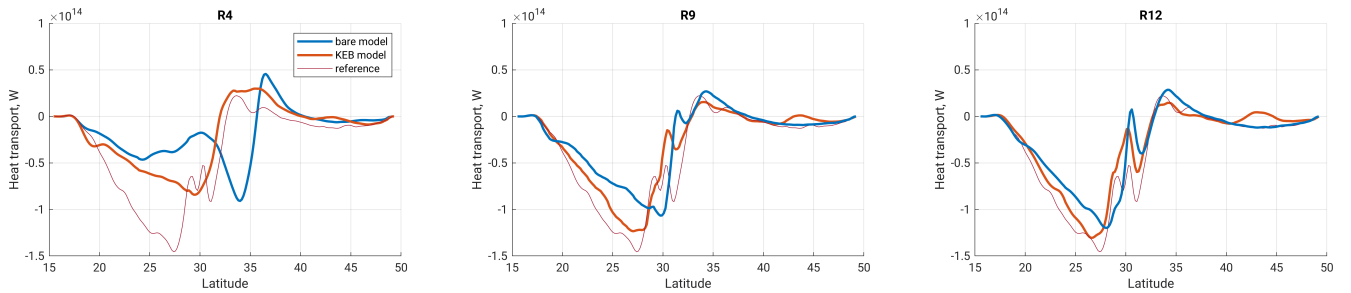


Рисунок 6.7 — Средний меридиональный вихревой поток тепла, проинтегрированный по глубине, Вт. Модели без параметризации ("bare model") и с параметризацией отрицательной вязкости ("KEB model") в сравнении с моделью R24 ("reference").

модели R9. Количество возвращаемой энергии равно  $c_{diss} = 0.8$ . Для построения коротковолновой параметризации ОПКЭ ("AR1 6 filters") используется количество фильтраций стохастической тенденции, равное  $n_s = 6$ , как и при разрешении R4. Вид фильтра задан в главе 5, формула (5.13). Масштаб длинноволновой параметризации ОПКЭ ("AR1 30 filters") не должен зависеть от шага сетки, поэтому для модели R9 мы выбираем количество фильтраций по следующей формуле:

$$n_s = n_s^{R4} \left( \frac{\Delta x^{R4}}{\Delta x^{R9}} \right)^2 \approx 30, \quad (6.20)$$

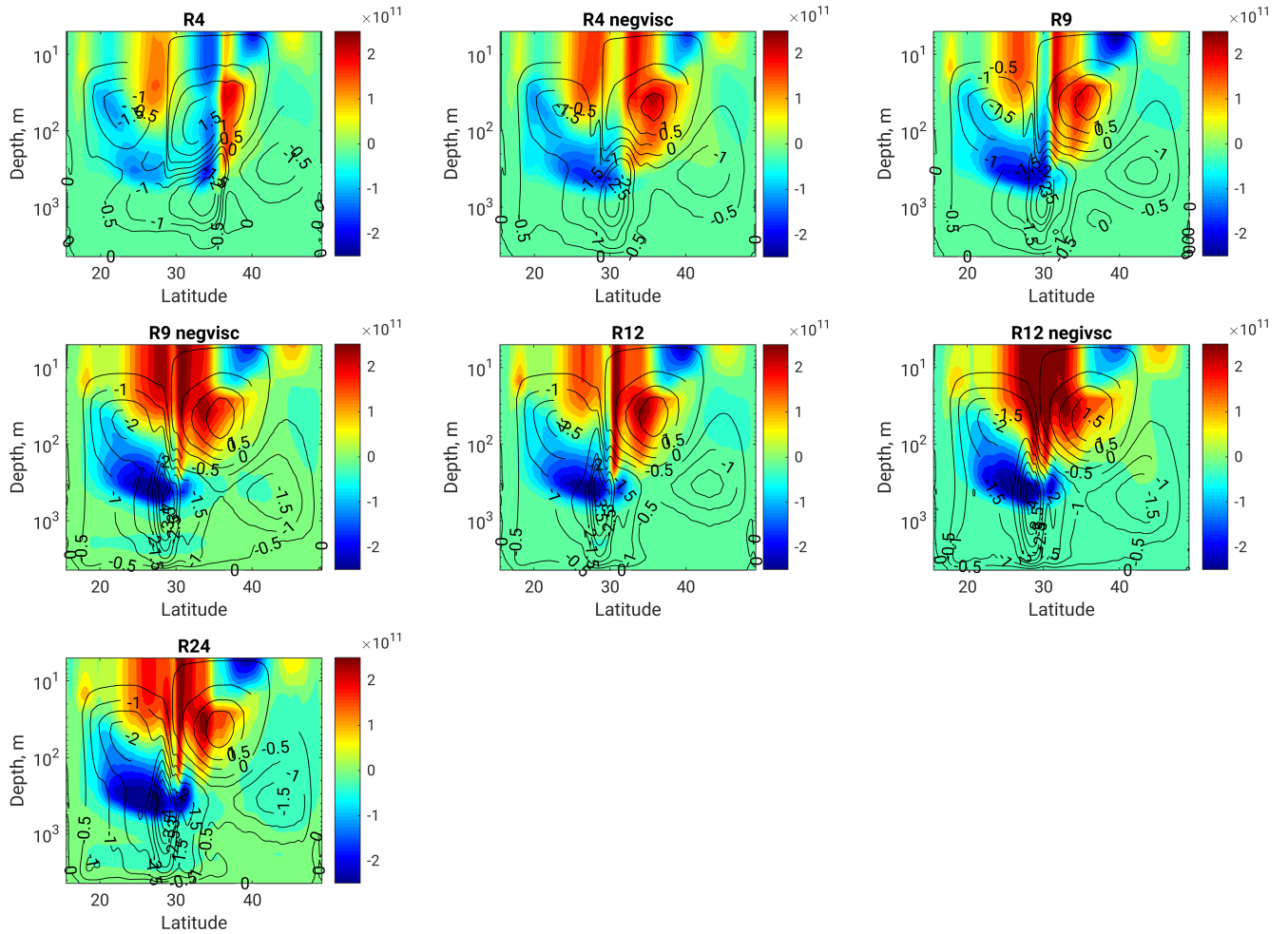


Рисунок 6.8 — Цветом: распределение по глубине меридионального вихревого потока тепла,  $\text{Вт} \cdot \text{м}^{-1}$ . Линиями: меридиональная функция тока, в Свердрупах. Результаты для параметризации отрицательной вязкости.

Таблица 9 — Нормы ошибок в средних за 20 лет температуре поверхности океана, уровне свободной поверхности и поверхностной солёности (SST, SSH, SSS) между грубыми моделями ( $R_c$ ) и моделью высокого разрешения ( $R24$ ). Результаты для стохастической параметризации. Следующие две нормы для произвольного поля  $\varphi(x,y)$  разделены точкой с запятой:  $\max(|\varphi_{R_c} - \varphi_{R24}|)$ ;  $\text{mean}(|\varphi_{R_c} - \varphi_{R24}|)$ .

	SST, $C^o$	SSH, м	SSS, psu
R9	3.8; 0.22	0.6; 0.04	0.37; 0.06
R9 AR1 6 filters	3.8; 0.25	0.52; 0.05	0.44; 0.06
R9 AR1 30 filters	3.8; 0.25	0.32; 0.04	0.43; 0.07

где  $n_s^{R4} = 6$  – количество фильтраций в модели R4, а  $\Delta x^{R4}$  и  $\Delta x^{R9}$  – шаг сетки в моделях R4 и R9. Здесь предполагается, что ширина итогового фильтра пропорциональна корню из количества применений [154].

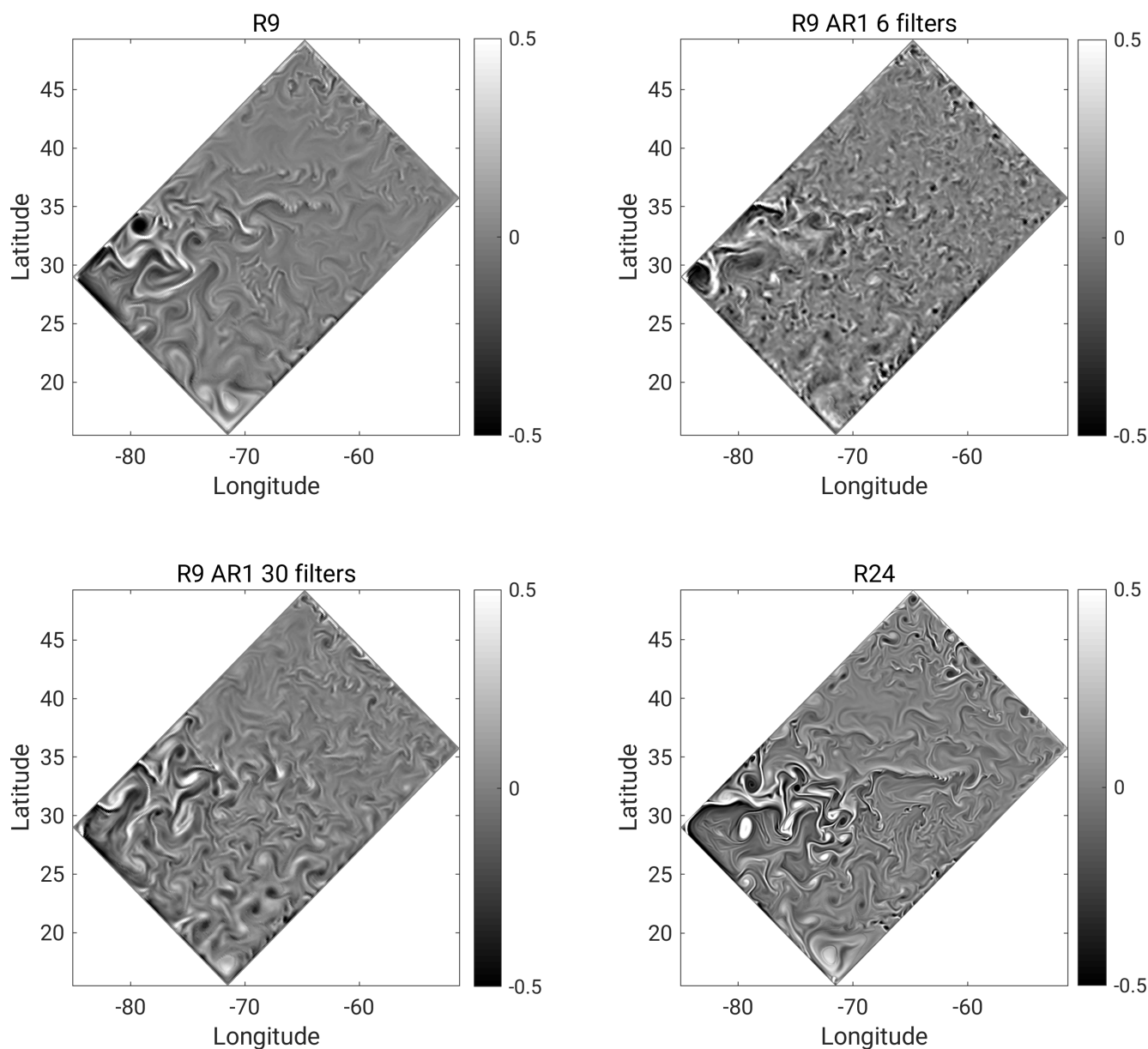


Рисунок 6.9 — Относительная завихренность на поверхности в единицах параметра Кориолиса для моделей R9, R24, а также моделей R9 со стохастической параметризацией AR1, см. приложение Г, при различном количестве применяемых фильтраций. 30 марта после разгона моделей.

Максимальный приток энергии для параметризации AR1 6 filters при разрешении R9 приходится на длину волны 63 км, которая соответствует суб-мезомасштабному диапазону. Как следует из рисунка 6.9, эта параметризация слишком сильно возбуждает мелкие вихри, по сравнению с моделью высокого разрешения R24. Меридиональный вихревой поток тепла лучше воспроизводится моделью с параметризацией AR1 30 filters, рис. 6.10; это связано с правильным воспроизведением вихревого потока на глубине более 100 метров, см. рис. 6.11. Также можно отметить более интенсивную меридиональную опро-

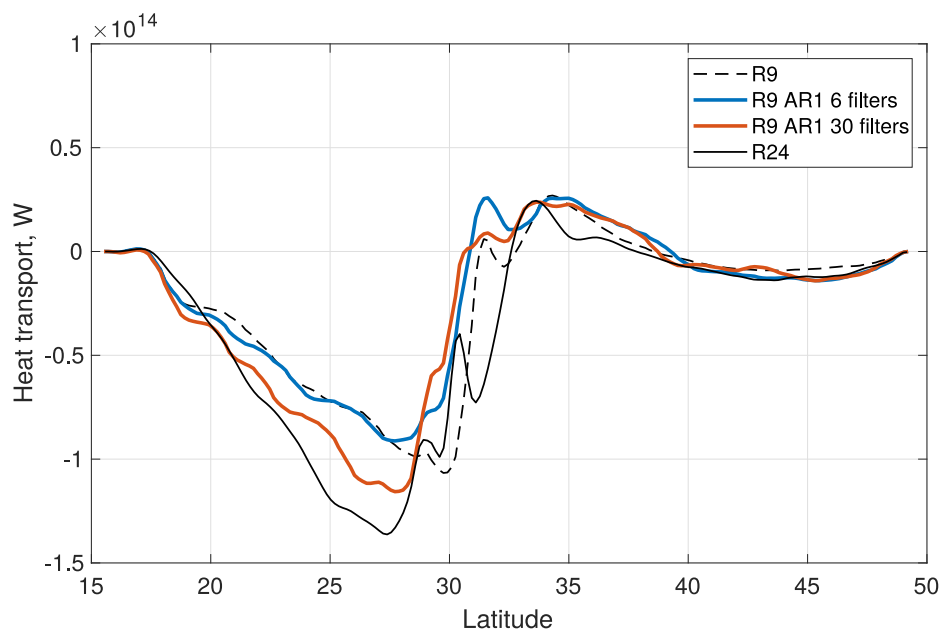


Рисунок 6.10 — Средний меридиональный вихревой поток тепла, проинтегрированный по глубине, Вт. Результаты для стохастической параметризации AR1.

кидывающую циркуляцию у дна в модели с параметризацией AR1 30 filters, в соответствии с моделью высокого разрешения, рис. 6.11. Хотя решения визуально значительно отличаются для двух параметризаций, ошибки в средних приповерхностных полях температуры и солености приблизительно одинаковые, причем некоторые ошибки больше, чем для модели без параметризации R9, см. таблицу 9.

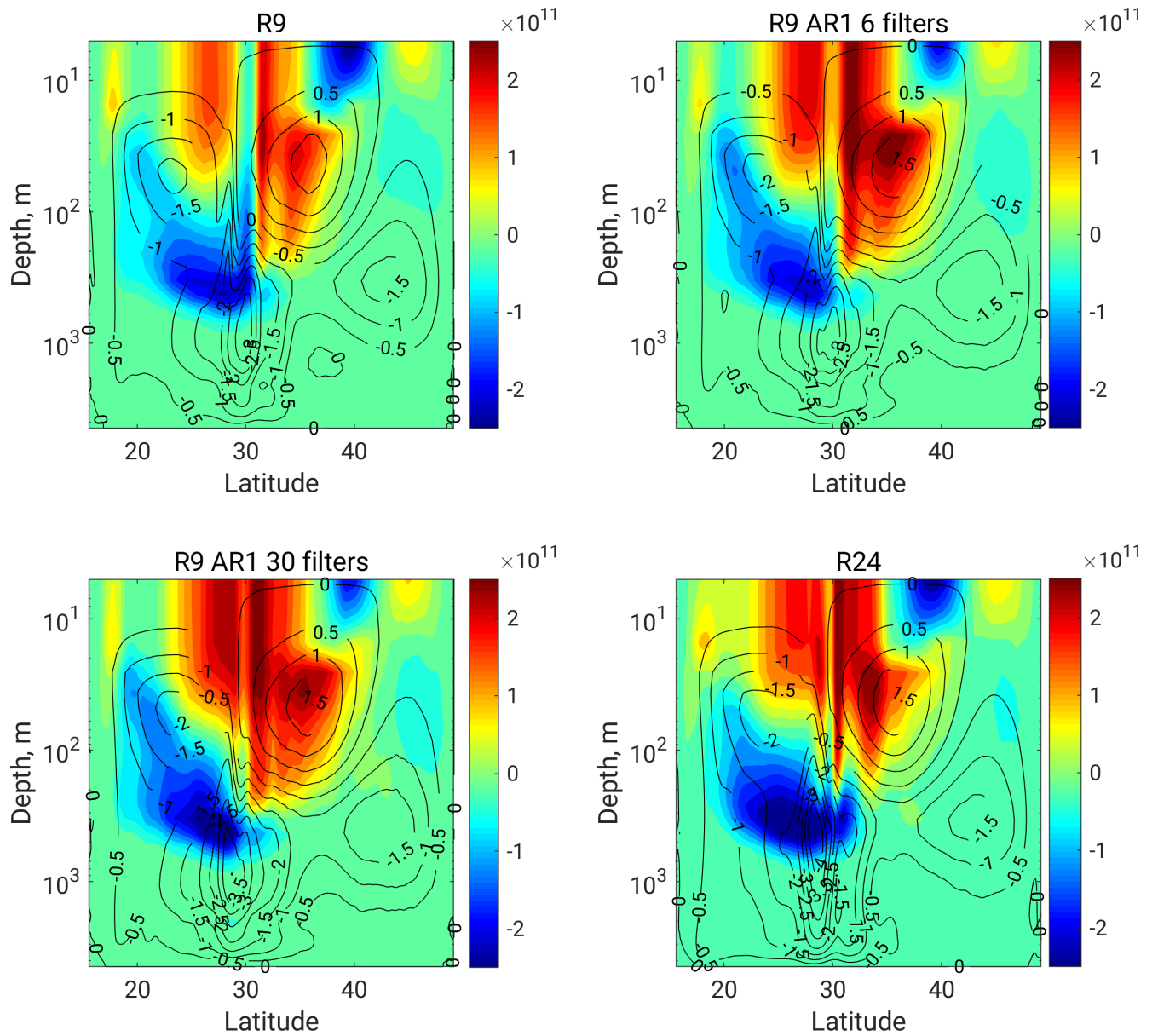


Рисунок 6.11 — Цветом: распределение по глубине меридионального вихревого потока тепла,  $\text{Вт} \cdot \text{м}^{-1}$ . Линиями: меридиональная функция тока, в Свездрупах.

## 6.7 Выводы

В данной главе получены следующие результаты:

- В примитивных уравнениях океана параметризации ОПКЭ восстанавливают вихревой перенос тепла как при вихредопускающем, так и при вихреразрешающем разрешении.
- Если диссипация описывается оператором бигармонической вязкости, то спектр возвращения энергии хорошо описывается оператором отрицательной вязкости.
- Масштаб возвращения энергии в этом случае должен соответствовать масштабам бароклинной неустойчивости.
- Если масштаб выбран меньше, то есть попадает в субмезомасштабный диапазон, то возбуждаются слишком мелкие вихри.
- При вихреразрешающем разрешении модель отрицательной вязкости приводит к меньшим ошибкам в средних приповерхностных полях, по сравнению со стохастической параметризацией.
- Модель подобия масштабов воспроизводит генерацию энергии в крупных масштабах (больше 300 км), однако для того чтобы отфильтровать мелкие диссипативные масштабы, понадобится применение слишком большого количества фильтров.
- Количество возвращаемой энергии зависит от того, какие физические процессы разрешены на сетке. Так, при частичном разрешении прямого каскада энергии в субмезомасштабном диапазоне необходимо уменьшать мощность параметризации, а при недостаточном разрешении мезомасштабного диапазона необходим учет неразрешенной на сетке бароклинной неустойчивости (значения  $c_{diss} > 1$  в формуле (6.16)). В частности, экспериментально подтверждена формула для локального значения  $c_{diss} = \left(1 + \frac{Ro}{Ro_{diss}}\right)^{-1}$ , предложенная в работе [143], которая параметризует локальное ослабление обратного каскада энергии вследствие локальной несбалансированности течения.

## Заключение

В данной диссертации проведен анализ и тестирование параметризаций подсеточной квазидвумерной турбулентности. Анализ включает в себя исследование влияния численных аппроксимаций на формирование крупномасштабных турбулентных течений, а также на особенности взаимодействия с подсеточной турбулентностью. На основе этого анализа построены параметризации подсеточной турбулентности для модели океана NEMO. В частности, получены следующие результаты:

1. Исследовано влияние численных аппроксимаций на формирование крупномасштабных когерентных структур в двумерной идеальной жидкости. Показано, что преимуществом обладают численные аппроксимации адвекции, сохраняющие численный аналог энтрофии.
2. Исследовано влияние численных аппроксимаций на формирование обратного каскада энергии в вынужденной турбулентности. В том случае, когда внешнее воздействие расположено вблизи сеточного масштаба, обратный каскад оказывается ослабленным. Преимуществом обладают схемы, сохраняющие численный аналог энтрофии и интегральной завихренности.
3. Показано, что подсеточные вихри участвуют в формировании обратного каскада энергии при грубом пространственном разрешении и вносят энергию на крупные масштабы (ОПКЭ). Значительная часть ОПКЭ связана с компенсацией ошибок аппроксимации.
4. Построены параметризации, моделирующие спектральную плотность возвращения энергии подсеточными силами, вычисленными с учетом ошибок аппроксимации. Такие параметризации способны восстановить спектральную плотность энергии на инерционном интервале обратного каскада энергии. Преимуществом обладает комбинированная модель, где часть ОПКЭ описывается с помощью модели подобия масштабов.
5. Исследовано влияние параметризаций подсеточной турбулентности на развитие неустойчивости баротропного струйного течения. Преимуществом обладают модели подобия масштабов и отрицательной вязкости, потому что ускоряют рост неустойчивых мод. Поскольку данные модели воздействуют на флуктуации и среднее течение различным образом,



- то их можно использовать совместно. Стохастическая параметризация является менее предпочтительной, так как возбуждает все собственные моды системы.
6. Разработан блок программ для моделирования подсеточной двумерной турбулентности в модели океана NEMO. Показано, что параметризации ОПКЭ способны улучшить воспроизведение вихревой кинетической энергии, вихревого потока тепла, меридиональной опрокидывающей циркуляции, распределение кинетической энергии по временным масштабам и уменьшить ошибки в средних полях. Аналогичные результаты невозможно получить, изменяя коэффициенты вязкости и диффузии.
  7. Проведено сравнение построенных параметризаций ОПКЭ в модели океана NEMO с подсеточными силами. Показано, что наибольшее соответствие между параметризациями и подсеточными силами наблюдается в том случае, когда подсеточные силы вычисляются с помощью метода релаксации. Согласно данным метода релаксации, ОПКЭ происходит на пространственном масштабе, связанном с физическим масштабом задачи – масштабом бароклинной неустойчивости. Модель отрицательной вязкости верно воспроизводит этот масштаб, а для стохастической модели необходима дополнительная настройка радиуса корреляции случайного поля.

## Приложение А

### Внешнее стохастическое воздействие

В зависимости от выбранных переменных  $(\mathbf{u}, p)$  или  $(\psi, \omega)$ , форсинг имеет вид

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \varphi) \quad \text{или} \quad f = c \cdot \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \varphi),$$

где  $\varphi \in [0, 2\pi)$  – фаза. Волновой вектор  $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$  лежит в тонкой круговой оболочке около волнового числа  $k_f$ :

$$\|\mathbf{k}\|_2 \in \left( k_f - \frac{k_\delta}{2}, k_f + \frac{k_\delta}{2} \right).$$

Волновые числа  $k_1, k_2$  выбраны целыми, а ширина оболочки  $k_\delta = 4$ .

Интегрирование по времени производится с помощью явной схемы Эйлера, причем на каждом шаге по времени величины  $\varphi, k_1, k_2$  выбираются случайно. В этом случае приток энергии на единицу поверхности  $\varepsilon$  зависит от второй нормы форсинга и шага по времени (см. [129]):

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \Delta t \|\mathbf{f}\|_2^2 / S = \frac{\Delta t}{4} (a^2 + b^2), \quad (\text{A.1})$$

где  $S$  – площадь области. Дополнительное условие на коэффициенты  $a, b$  получаем из условия бездивергентности:

$$\nabla_h \cdot \mathbf{f} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} k'_1 & k'_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0, \quad (\text{A.2})$$

где  $\nabla_h$  – конечно-разностный оператор градиента (2.7), а  $k'_1, k'_2$  – его модифицированные волновые числа. В итоге, выбрав шаг по времени  $\Delta t$  и приток энергии  $\varepsilon$  можно найти коэффициенты  $a, b$  из уравнений (A.1), (A.2). Коэффициент  $c$  определяется исходя из дискретного соотношения между завихренностью и скоростью.

## Приложение Б

## Предварительное тестирование коротковолновой стохастической параметризации

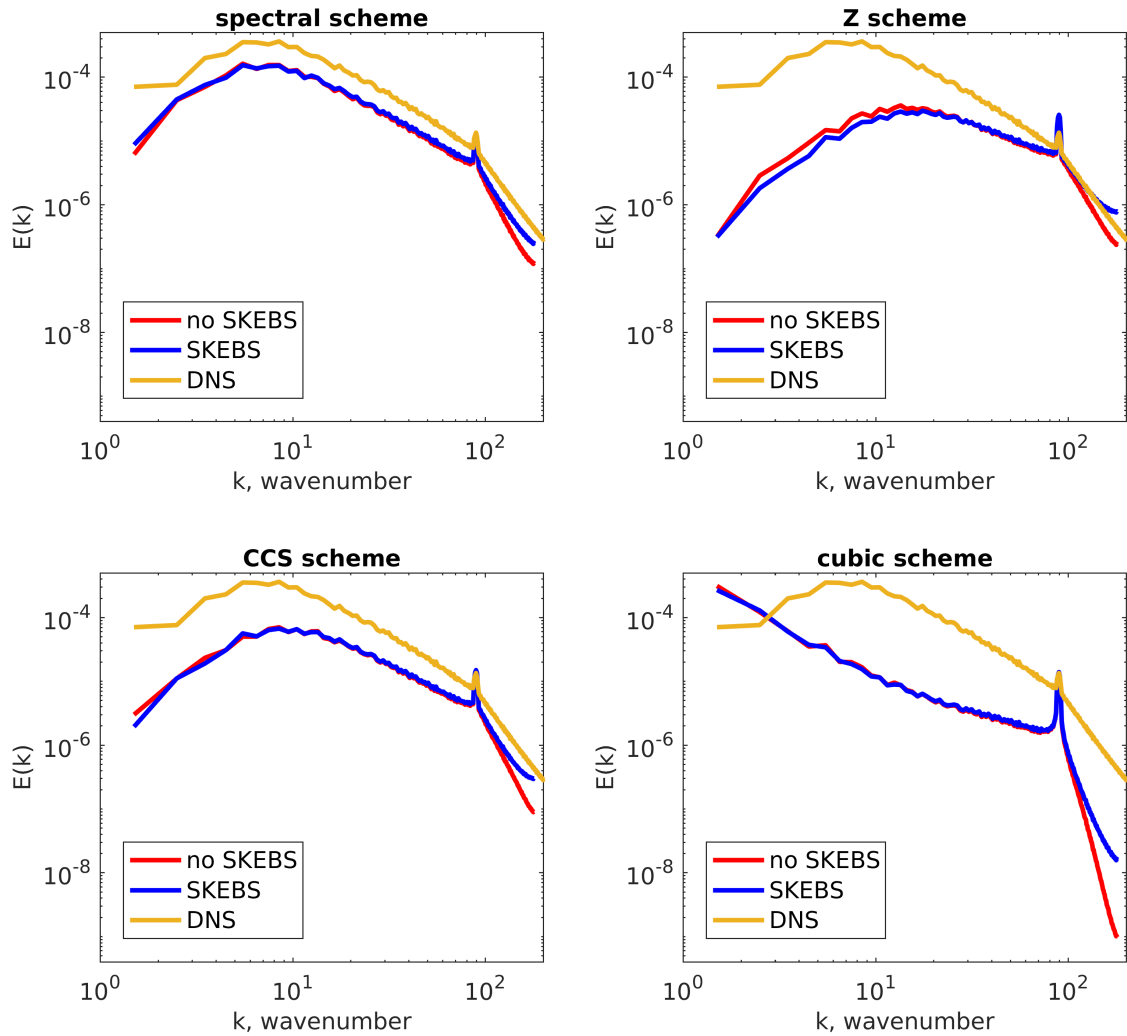


Рисунок Б.1 — Спектральная плотность энергии  $E(k)$  в статистически-равновесном состоянии для четырех схем при разрешении  $360^2$ .

Грубая модель без параметризации ("no SKEBS"), с включенной параметризацией ("SKEBS") и расчет при высоком разрешении ("DNS").

"spectral" – псевдоспектральная схема [155].

В работе [78] спектральная плотность притока энергии от стохастической параметризации выбирается пропорционально  $k^{0.46}$ . Такой спектральный

наклон соответствует спектральной плотности подсеточных сил, как будет показано в разделе 6.2 главы 6. В данном приложении стохастическая параметризация имеет спектральную мощность  $\sim k^{0.46}$  и выбрана на энстрофийном инерционном интервале ( $90 \leq k \leq 180$ ), а приток энергии от параметризации составляет 30% от мощности внешнего воздействия  $\varepsilon$ . Как следует из рисунка Б.1, параметризация возбуждает мелкие масштабы ( $90 \leq k \leq 180$ ), однако на масштабах инерционного интервала обратного каскада энергии ( $0 \leq k \leq 90$ ) изменения плотности энергии незначительны. Таким образом мы показали, что стохастическое возбуждение, расположенное на энстрофийном интервале вблизи сеточного масштаба не позволяет восстановить обратный каскад энергии. В главе 3 показано, что когда стохастическое возбуждение соответствует инерционному интервалу обратного каскада энергии, спектральная плотность энергии в крупных масштабах может быть восстановлена.

## Приложение В

### Корректность по Адамару (устойчивость к начальным данным) для параметризации отрицательной вязкости

Уравнение диффузии с отрицательным коэффициентом диффузии является некорректной задачей. Однако в данной диссертации мы используем отрицательный коэффициент вязкости только совместно с бигармонической вязкостью. Такие уравнения называются уравнениями Курамото-Сивашинского [156–158]. В данном приложении мы покажем, что линейная часть уравнения Курамото-Сивашинского в одномерном случае устойчива к начальным данным на конечном промежутке времени.

Рассмотрим на периодическом отрезке  $\Omega = [0, 2\pi)$  следующее уравнение:

$$\partial_t u(x, t) = -\partial_{xx}(\nu_4 \partial_{xx} + \nu_2)u(x, t), \quad \nu_4 > 0, \quad \nu_2 > 0. \quad (\text{B.1})$$

В Фурье-пространстве получаем:

$$\partial_t u_k(t) = k^2(\nu_2 - \nu_4 k^2)u_k(t) = \lambda(k)u_k(t), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{B.2})$$

Функция  $\lambda(k)$  ограничена сверху:

$$\lambda(k) \leq \frac{\nu_2^2}{4\nu_4}, \quad \text{при } \nu_4 > 0, \quad \nu_2 > 0. \quad (\text{B.3})$$

Пусть  $\delta u(x, 0)$  – возмущение начальных данных. Тогда возмущение решения к моменту времени  $T$  в Фурье-пространстве:

$$\delta u_k(T) = \delta u_k(0)e^{\lambda(k)T}. \quad (\text{B.4})$$

В  $L_2$  норме,  $\|u(x)\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k|^2$ , имеем следующее неравенство:

$$\|\delta u(x, T)\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\delta u_k(0)|^2 e^{2\lambda(k)T} \leq \exp\left(\frac{\nu_2^2}{2\nu_4}T\right) \|\delta u(x, 0)\|^2 \rightarrow \quad (\text{B.5})$$

$$\|\delta u(x, T)\| \leq \exp\left(\frac{\nu_2^2}{4\nu_4}T\right) \|\delta u(x, 0)\|, \quad (\text{B.6})$$

т.е. на произвольном *конечном* интервале времени задача устойчива к начальным данным. В свою очередь, уравнение диффузии равномерно устойчиво на

на произвольном интервале времени, а уравнение диффузии с отрицательным коэффициентом диффузии неустойчиво на произвольном интервале времени.

Характерное время расхождения траекторий для модели NEMO в конфигурации Double Gyre при разрешении  $1/4^\circ$ :

$$T = 4 \frac{\nu_4}{\nu_2} \approx 4 \frac{5 \cdot 10^{11} \text{М}^4/\text{с}}{1000^2 \text{М}^4/\text{с}^2} \approx 23 \text{ дней}, \quad (\text{B.7})$$

что сравнимо с характерными временами мезомасштабных вихрей  $\approx 30$  дней.

## Приложение Г

### Стохастическая параметризация с авторегрессионным процессом по времени

Здесь приведена модификация стохастической параметризации из раздела 5.2.2, учитывающая скоррелированность стохастической тенденции по времени посредством использования AR1 процесса, как предложено в [78]. Построим случайную функцию тока:

$$\hat{\psi}(x, y, z, t^n) = \varphi(x, y, t^n) \cdot \sqrt{\max(\dot{E}_{diss}, 0)}, \quad (\text{Г.1})$$

где  $\varphi$  – белый по времени и пространству сеточный шум с распределением  $N(0,1)$ . Согласно работе [68], построим скоррелированную стохастическую тенденцию,  $\psi(x, y, z, t^n)$ , следующим образом:

$$\psi(x, y, z, t^{n+1}) = \psi(x, y, z, t^n) \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) + \left[\frac{\Delta t}{\tau} \left(2 - \frac{\Delta t}{\tau}\right)\right]^{1/2} \alpha S^{n_s}(\hat{\psi}). \quad (\text{Г.2})$$

Результирующий процесс  $\psi$  имеет время корреляции  $\tau$ . Кроме того, такая форма записи AR1 процесса обеспечивает скооррелированность, при этом не меняя дисперсию, а именно:

$$\langle |\nabla_h^\perp \psi|^2 \rangle = \alpha^2 \langle |\nabla_h^\perp S^{n_s}(\hat{\psi})|^2 \rangle. \quad (\text{Г.3})$$

Функция тока  $\psi$  модифицирует уравнение (5.2) следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t} = \dots + \nabla_h^\perp \psi. \quad (\text{Г.4})$$

Поскольку приток энергии от тенденции  $\psi$  равен  $\tau \langle |\nabla_h^\perp \psi|^2 \rangle$ , выберем амплитуду  $\alpha$  таким образом, чтобы удовлетворялось следующее равенство:

$$\alpha^2 \tau \int \langle |\nabla_h^\perp S^{n_s}(\hat{\psi})|^2 \rangle dx dy dz = c_{diss} \int \dot{E}_{diss} dx dy dz. \quad (\text{Г.5})$$

Как и в разделе 5.2.2, мы используем аппроксимацию:

$$\int \langle |\nabla_h^\perp S^{n_s}(\hat{\psi})|^2 \rangle dx dy dz \approx \int |\nabla_h^\perp S^{n_s}(\hat{\psi})|^2 dx dy dz. \quad (\text{Г.6})$$

**Коррекция притока энергии.** Приток энергии для AR1 параметризации вычисляется в предположении, что стохастическая тенденция не скоррелирована с другими правыми частями уравнения. На практике часто получается, что фактический приток энергии,  $\langle \nabla_h^\perp \psi \cdot \mathbf{U}_h \rangle$ , оказывается меньше теоретического,  $\tau \langle |\nabla_h^\perp \psi|^2 \rangle$ . Нами была предложена автоматическая процедура коррекции амплитуды. Оставим способ генерации стохастической тенденции, описанный выше, без изменений, а модифицируем только конечную амплитуду тенденции:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t} = \dots + \beta \nabla_h^\perp \psi, \quad (\Gamma.7)$$

где  $\beta$  – число, большее единицы. Приравняем интегральный приток энергии к диссипации:

$$\beta \int \langle \nabla_h^\perp \psi \cdot \mathbf{U}_h \rangle dx dy dz = c_{diss} \int \dot{E}_{diss} dx dy dz, \quad (\Gamma.8)$$

Тогда можно получить оценку  $\beta$  следующим образом:

$$\beta(t) = \frac{c_{diss} \int_0^t \int \dot{E}_{diss} dx dy dz dt'}{\int_0^t \int \nabla_h^\perp \psi \cdot \mathbf{U}_h dx dy dz dt'}. \quad (\Gamma.9)$$

Здесь осреднение по времени выполняется для того, чтобы набрать достаточное количество статистики. Если оцененное значение  $\beta$  выходит за пределы интервала (1,3), то  $\beta$  приравнивается к граничным значениям этого интервала. Для эксперимента с моделью R4 и AR1 параметризацией, при  $n_s = 6$ ,  $c_{diss} = 0.8$  и  $\tau = 1$  день, график  $\beta(t)$  приведен на рисунке [Г.1](#). Экспериментально проверено, что при таком выборе  $\beta(t)$  интеграл по времени за 20 лет от приходящей энергии отличается приблизительно на 1.5% от заданной величины, см. рисунок [Г.2](#). Найденное таким образом значение  $\beta = 1.17$  увеличивает приток энергии на  $(1.17^2 - 1) \cdot 100\% \approx 37\%$ .



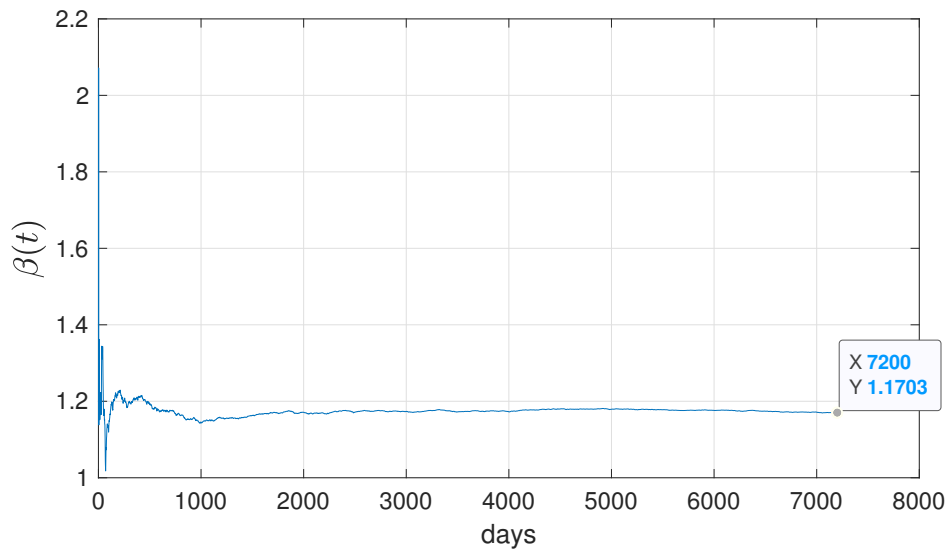


Рисунок Г.1 —  $\beta(t)$  для модели R4 при  $c_{diss} = 0.8$  и  $n_s = 6$ .

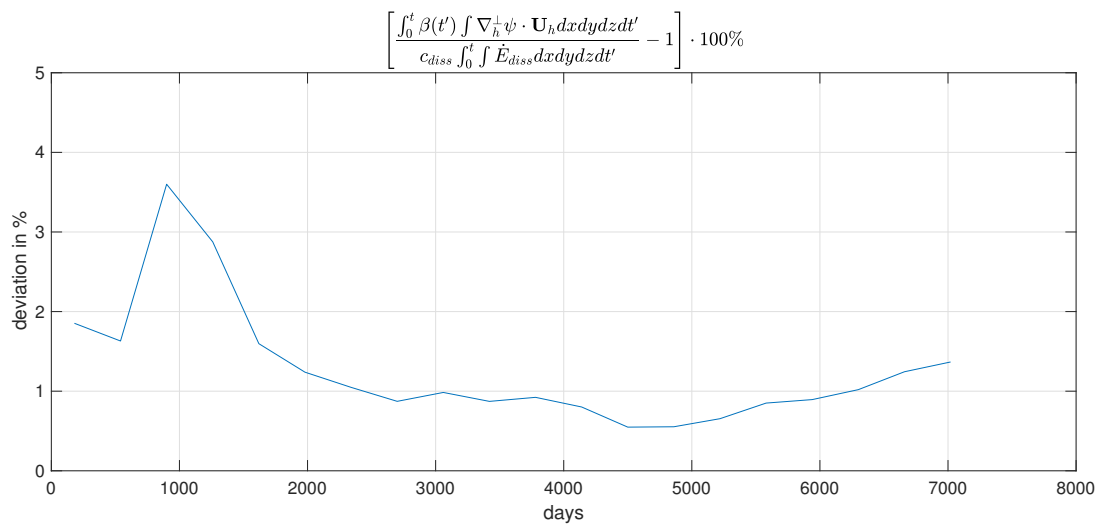


Рисунок Г.2 — Отклонение притока энергии от заданного в процентах для модели R4 при  $c_{diss} = 0.8$  и  $n_s = 6$ .

## Публикации автора по теме диссертации

1. *Пережогин, П. А.* Равновесные состояния конечномерных аппроксимаций уравнений двумерной идеальной жидкости / П. А. Пережогин, В. П. Дымников // *Нелинейная динамика*. — 2017. — Т. 13, № 1. — С. 55—79.
2. *Пережогин, П.* Моделирование квазиравновесных состояний двумерной идеальной жидкости / П. Пережогин, В. Дымников // *Доклады академии наук*. — 2017. — Т. 474, № 1. — С. 36—40.
3. Comparison of numerical advection schemes in two-dimensional turbulence simulation / P. A. Perezhogin [и др.] // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. — 2017. — Т. 32, № 1. — С. 47—60.
4. *Дымников, В.* О системах гидродинамического типа, аппроксимирующих уравнения двумерной идеальной жидкости / В. Дымников, П. Пережогин // *Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана*. — 2018. — Т. 54, № 3. — С. 272—282.
5. *Perezhogin, P. A.* Stochastic and deterministic kinetic energy backscatter parameterizations for simulation of the two-dimensional turbulence / P. A. Perezhogin, A. V. Glazunov, A. S. Gritsun // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. — 2019. — Т. 34, № 4. — С. 197—213.
6. *Perezhogin, P. A.* 2D turbulence closures for the barotropic jet instability simulation / P. A. Perezhogin // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. — 2020. — Т. 35, № 1. — С. 21—35.
7. *Perezhogin, P. A.* Testing of kinetic energy backscatter parameterizations in the NEMO ocean model / P. A. Perezhogin // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. — 2020. — Т. 35, № 2. — С. 69—82.
8. *Perezhogin, P.* Deterministic and stochastic parameterizations of kinetic energy backscatter in the NEMO ocean model in Double-Gyre configuration / P. Perezhogin // *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. Т. 386. — IOP Publishing. 2019. — С. 012025.

## Список литературы

9. *Sagaut, P.* Large eddy simulation for incompressible flows: an introduction / P. Sagaut. — Springer Science & Business Media, 2006.
10. *Vallis, G. K.* Atmospheric and oceanic fluid dynamics / G. K. Vallis. — Cambridge University Press, 2017.
11. *Должанский, Ф.* Основы геофизической гидродинамики / Ф. Должанский. — Физматлит, 2011.
12. *Vallis, G. K.* Generation of mean flows and jets on a beta plane and over topography / G. K. Vallis, M. E. Maltrud // Journal of physical oceanography. — 1993. — Т. 23, № 7. — С. 1346—1362.
13. Scale-aware deterministic and stochastic parametrizations of eddy-mean flow interaction / L. Zanna [и др.] // Ocean Modelling. — 2017. — Т. 111. — С. 66—80.
14. Seasonality in submesoscale turbulence / J. Callies [и др.] // Nature communications. — 2015. — Т. 6, № 1. — С. 1—8.
15. *Callies, J.* Interpreting energy and tracer spectra of upper-ocean turbulence in the submesoscale range (1–200 km) / J. Callies, R. Ferrari // Journal of Physical Oceanography. — 2013. — Т. 43, № 11. — С. 2456—2474.
16. *Rhines, P. B.* Geostrophic turbulence / P. B. Rhines // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1979. — Т. 11, № 1. — С. 401—441.
17. *McWilliams, J. C.* The nature and consequences of oceanic eddies / J. C. McWilliams // Ocean modeling in an eddying regime. — 2008. — Т. 177. — С. 5—15.
18. *Kraichnan, R. H.* Inertial ranges in two-dimensional turbulence / R. H. Kraichnan // The Physics of Fluids. — 1967. — Т. 10, № 7. — С. 1417—1423.
19. *Leith, C. E.* Diffusion approximation for two-dimensional turbulence / C. E. Leith // The Physics of Fluids. — 1968. — Т. 11, № 3. — С. 671—672.

20. *Batchelor, G. K.* Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence / G. K. Batchelor // The Physics of Fluids. — 1969. — Т. 12, № 12. — С. II—233.
21. *Boffetta, G.* Inverse energy cascade in two-dimensional turbulence: Deviations from Gaussian behavior / G. Boffetta, A. Celani, M. Vergassola // Physical Review E. — 2000. — Т. 61, № 1. — R29.
22. *Salmon, R.* Baroclinic instability and geostrophic turbulence / R. Salmon // Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. — 1980. — Т. 15, № 1. — С. 167—211.
23. *Gill, A.* Energy partition in the large-scale ocean circulation and the production of mid-ocean eddies / A. Gill, J. Green, A. Simmons // Deep sea research and oceanographic abstracts. Т. 21. — Elsevier. 1974. — С. 499—528.
24. Evaluation of climate models / G. Flato [и др.] // Climate change 2013: the physical science basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change. — Cambridge University Press, 2014. — С. 741—866.
25. *Redi, M. H.* Oceanic isopycnal mixing by coordinate rotation / M. H. Redi // Journal of Physical Oceanography. — 1982. — Т. 12, № 10. — С. 1154—1158.
26. *Gent, P. R.* Isopycnal mixing in ocean circulation models / P. R. Gent, J. C. McWilliams // Journal of Physical Oceanography. — 1990. — Т. 20, № 1. — С. 150—155.
27. High resolution model intercomparison project (HighResMIP v1. 0) for CMIP6 / R. J. Haarsma [и др.] // Geoscientific Model Development. — 2016. — Т. 9, № 11. — С. 4185—4208.
28. Impact of partial steps and momentum advection schemes in a global ocean circulation model at eddy-permitting resolution / B. Bernard [и др.] // Ocean dynamics. — 2006. — Т. 56, № 5/6. — С. 543—567.
29. *Maltrud, M. E.* Energy and enstrophy transfer in numerical simulations of two-dimensional turbulence / M. E. Maltrud, G. K. Vallis // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. — 1993. — Т. 5, № 7. — С. 1760—1775.
30. *Данилов, С. Д.* Квазидвумерная турбулентность / С. Д. Данилов, Г. Давид // Успехи физических наук. — 2000. — Т. 170, № 9. — С. 921—968.

31. *Ghosal, S.* An analysis of numerical errors in large-eddy simulations of turbulence / S. Ghosal // Journal of Computational Physics. — 1996. — T. 125, № 1. — C. 187–206.
32. *Bouchet, F.* Statistical mechanics of two-dimensional and geophysical flows / F. Bouchet, A. Venaille // Physics reports. — 2012. — T. 515, № 5. — C. 227–295.
33. *Robert, R.* Statistical equilibrium states for two-dimensional flows / R. Robert, J. Sommeria // Journal of Fluid Mechanics. — 1991. — T. 229. — C. 291–310.
34. *Arakawa, A.* Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: Two-dimensional incompressible flow. Part I / A. Arakawa // Journal of computational physics. — 1966. — T. 1, № 1. — C. 119–143.
35. *Frank, J.* A Hamiltonian particle-mesh method for the rotating shallow-water equations / J. Frank, G. Gottwald, S. Reich // Meshfree methods for partial differential equations. — Springer, 2003. — C. 131–142.
36. *Zeitlin, V.* Finite-mode analogs of 2D ideal hydrodynamics: Coadjoint orbits and local canonical structure / V. Zeitlin // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1991. — T. 49, № 3. — C. 353–362.
37. *Abramov, R. V.* Statistically relevant and irrelevant conserved quantities for the equilibrium statistical description of the truncated Burger-Hopf equation and the equations for barotropic flow / R. V. Abramov. — 2002.
38. *Dubinkina, S.* Statistical relevance of vorticity conservation in the Hamiltonian particle-mesh method / S. Dubinkina, J. Frank // Journal of Computational Physics. — 2010. — T. 229, № 7. — C. 2634–2648.
39. *Dubinkina, S.* Relevance of conservative numerical schemes for an Ensemble Kalman Filter / S. Dubinkina // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. — 2018. — T. 144, № 711. — C. 468–477.
40. *Palmer, T.* Towards the probabilistic Earth-system simulator: a vision for the future of climate and weather prediction / T. Palmer // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. — 2012. — T. 138, № 665. — C. 841–861.
41. *Chasnov, J. R.* Simulation of the Kolmogorov inertial subrange using an improved subgrid model / J. R. Chasnov // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. — 1991. — T. 3, № 1. — C. 188–200.

42. *Frederiksen, J. S.* Dynamical subgrid-scale parameterizations from direct numerical simulations / J. S. Frederiksen, S. M. Kepert // Journal of the atmospheric sciences. — 2006. — T. 63, № 11. — С. 3006—3019.
43. An energy-conserving restoration scheme for the shallow-water equations / J. Kent [и др.] // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. — 2016. — T. 142, № 695. — С. 1100—1110.
44. *Frederiksen, J. S.* Eddy viscosity and stochastic backscatter parameterizations on the sphere for atmospheric circulation models / J. S. Frederiksen, A. G. Davies // Journal of the atmospheric sciences. — 1997. — T. 54, № 20. — С. 2475—2492.
45. *Meneveau, C.* Scale-invariance and turbulence models for large-eddy simulation / C. Meneveau, J. Katz // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2000. — T. 32, № 1. — С. 1—32.
46. *Bardina, J.* Improved subgrid-scale models for large-eddy simulation / J. Bardina, J. Ferziger, W. Reynolds // 13th fluid and plasmadynamics conference. — 1980. — С. 1357.
47. *Nadiga, B.* Orientation of eddy fluxes in geostrophic turbulence / B. Nadiga // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2008. — T. 366, № 1875. — С. 2489—2508.
48. Regularized, parameter free scale similarity type models for Large Eddy Simulation / M. Klein [и др.] // International Journal of Heat and Fluid Flow. — 2020. — T. 81. — С. 108496.
49. *Bouchet, F.* Parameterization of two-dimensional turbulence using an anisotropic maximum entropy production principle / F. Bouchet. — 2003.
50. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model / M. Germano [и др.] // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. — 1991. — T. 3, № 7. — С. 1760—1765.
51. *Maulik, R.* Dynamic modeling of the horizontal eddy viscosity coefficient for quasigeostrophic ocean circulation problems / R. Maulik, O. San // Journal of Ocean Engineering and Science. — 2016. — T. 1, № 4. — С. 300—324.
52. *Bachman, S. D.* A scale-aware subgrid model for quasi-geostrophic turbulence / S. D. Bachman, B. Fox-Kemper, B. Pearson // Journal of Geophysical Research: Oceans. — 2017. — T. 122, № 2. — С. 1529—1554.

53. *Beck, A. D.* Deep neural networks for data-driven turbulence models / A. D. Beck, D. G. Flad, C.-D. Munz // arXiv preprint arXiv:1806.04482. — 2018.
54. Subgrid modelling for two-dimensional turbulence using neural networks / R. Maulik [и др.] // Journal of Fluid Mechanics. — 2019. — Т. 858. — С. 122—144.
55. *Stolz, S.* An approximate deconvolution procedure for large-eddy simulation / S. Stolz, N. A. Adams // Physics of Fluids. — 1999. — Т. 11, № 7. — С. 1699—1701.
56. Approximate deconvolution large eddy simulation of a barotropic ocean circulation model / O. San [и др.] // Ocean Modelling. — 2011. — Т. 40, № 2. — С. 120—132.
57. *Maulik, R.* A neural network approach for the blind deconvolution of turbulent flows / R. Maulik, O. San // Journal of Fluid Mechanics. — 2017. — Т. 831. — С. 151—181.
58. *Berloff, P. S.* Random-forcing model of the mesoscale oceanic eddies / P. S. Berloff // Journal of Fluid Mechanics. — 2005. — Т. 529. — С. 71—95.
59. On data-driven augmentation of low-resolution ocean model dynamics / E. Ryzhov [и др.] // Ocean Modelling. — 2019. — Т. 142. — С. 101464.
60. *Majda, A. J.* A mathematical framework for stochastic climate models / A. J. Majda, I. Timofeyev, E. Vanden Eijnden // Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences. — 2001. — Т. 54, № 8. — С. 891—974.
61. *Grooms, I.* Stochastic superparameterization in quasigeostrophic turbulence / I. Grooms, A. J. Majda // Journal of Computational Physics. — 2014. — Т. 271. — С. 78—98.
62. *Frank, J. E.* Stochastic homogenization for an energy conserving multi-scale toy model of the atmosphere / J. E. Frank, G. A. Gottwald // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2013. — Т. 254. — С. 46—56.
63. *Gugole, F.* Numerical development and evaluation of an energy conserving conceptual stochastic climate model / F. Gugole, C. L. Franzke // Mathematics of climate and weather forecasting. — 2019. — Т. 5, № 1. — С. 45—64.

64. *Gugole, F.* Spatial Covariance Modeling for Stochastic Subgrid-Scale Parameterizations Using Dynamic Mode Decomposition / F. Gugole, C. Franzke. — 2019.
65. New trends in ensemble forecast strategy: uncertainty quantification for coarse-grid computational fluid dynamics / V. Resseguier [и др.] // Archives of Computational Methods in Engineering. — 2020. — С. 1–82.
66. *Cooper, F. C.* Optimisation of an idealised primitive equation ocean model using stochastic parameterization / F. C. Cooper // Ocean Modelling. — 2017. — Т. 113. — С. 187–200.
67. *Mana, P. P.* Toward a stochastic parameterization of ocean mesoscale eddies / P. P. Mana, L. Zanna // Ocean Modelling. — 2014. — Т. 79. — С. 1–20.
68. *Schumann, U.* Stochastic backscatter of turbulence energy and scalar variance by random subgrid-scale fluxes / U. Schumann // Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences. — 1995. — Т. 451, № 1941. — С. 293–318.
69. *Jansen, M. F.* Parameterizing subgrid-scale eddy effects using energetically consistent backscatter / M. F. Jansen, I. M. Held // Ocean Modelling. — 2014. — Т. 80. — С. 36–48.
70. *Lesieur, M.* Turbulence in Fluids / M. Lesieur. — Springer Netherlands, 2008.
71. *Leslie, D.* The application of turbulence theory to the formulation of subgrid modelling procedures / D. Leslie, G. Quarini // Journal of fluid mechanics. — 1979. — Т. 91, № 1. — С. 65–91.
72. *Leith, C.* Stochastic backscatter in a subgrid-scale model: Plane shear mixing layer / C. Leith // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. — 1990. — Т. 2, № 3. — С. 297–299.
73. *Mason, P. J.* Stochastic backscatter in large-eddy simulations of boundary layers / P. J. Mason, D. J. Thomson // Journal of Fluid Mechanics. — 1992. — Т. 242. — С. 51–78.
74. *Weinbrecht, S.* Stochastic backscatter for cloud-resolving models. Part I: Implementation and testing in a dry convective boundary layer / S. Weinbrecht, P. J. Mason // Journal of the atmospheric sciences. — 2008. — Т. 65, № 1. — С. 123–139.



75. *Zidikheri, M. J.* Stochastic subgrid parameterizations for simulations of atmospheric baroclinic flows / M. J. Zidikheri, J. S. Frederiksen // Journal of the atmospheric sciences. — 2009. — Т. 66, № 9. — С. 2844—2858.
76. *Kitsios, V.* Stochastic Subgrid Turbulence Parameterisation of Eddy-Eddy, Eddy-Meanfield, Eddy-Topographic and Meanfield-Meanfield Interactions in the Atmosphere / V. Kitsios, J. Frederiksen // Australasian Fluid Mechanics Conference, 2018. — Australasian Fluid Mechanics Society. 2018.
77. *Shutts, G.* A kinetic energy backscatter algorithm for use in ensemble prediction systems / G. Shutts // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society: A journal of the atmospheric sciences, applied meteorology and physical oceanography. — 2005. — Т. 131, № 612. — С. 3079—3102.
78. A spectral stochastic kinetic energy backscatter scheme and its impact on flow-dependent predictability in the ECMWF ensemble prediction system / J. Berner [и др.] // Journal of the Atmospheric Sciences. — 2009. — Т. 66, № 3. — С. 603—626.
79. *Zurita-Gotor, P.* Kinetic energy-conserving hyperdiffusion can improve low resolution atmospheric models / P. Zurita-Gotor, I. M. Held, M. F. Jansen // Journal of Advances in Modeling Earth Systems. — 2015. — Т. 7, № 3. — С. 1117—1135.
80. Ocean kinetic energy backscatter parametrizations on unstructured grids: Impact on mesoscale turbulence in a channel / S. Juricke [и др.] // Ocean Modelling. — 2019. — Т. 138. — С. 51—67.
81. *Held, I. M.* A proposal for the intercomparison of the dynamical cores of atmospheric general circulation models / I. M. Held, M. J. Suarez // Bulletin of the American Meteorological society. — 1994. — Т. 75, № 10. — С. 1825—1830.
82. Ocean kinetic energy backscatter parametrization on unstructured grids: Impact on global eddy-permitting simulations / S. Juricke [и др.] // Journal of Advances in Modeling Earth Systems. — 2020. — Т. 12, № 1. — e2019MS001855.

83. Energy budget-based backscatter in an eddy permitting primitive equation model / M. F. Jansen [и др.] // *Ocean Modelling*. — 2015. — Т. 94. — С. 15–26.
84. *Berloff, P.* Dynamically consistent parameterization of mesoscale eddies. Part III: Deterministic approach / P. Berloff // *Ocean Modelling*. — 2018. — Т. 127. — С. 1–15.
85. *Grooms, I.* Numerical schemes for stochastic backscatter in the inverse cascade of quasigeostrophic turbulence / I. Grooms, Y. Lee, A. J. Majda // *Multiscale Modeling & Simulation*. — 2015. — Т. 13, № 3. — С. 1001–1021.
86. NEMO ocean engine / G. Madec [и др.]. — 2015.
87. *Баклановская, В. Ф.* Исследование метода сеток для двумерных уравнений типа Навье–Стокса с неотрицательной вязкостью. II / В. Ф. Баклановская // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 1984. — Т. 24, № 12. — С. 1827–1841.
88. *Юдович, В. И.* Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости / В. И. Юдович // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 1963. — Т. 3, № 6. — С. 1032–1066.
89. *Marchioro, C.* Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids. Т. 96 / C. Marchioro, M. Pulvirenti. — Springer Science & Business Media, 2012.
90. *Robert, R.* On the statistical mechanics of 2D Euler equation / R. Robert // *Communications in Mathematical Physics*. — 2000. — Т. 212, № 1. — С. 245–256.
91. *Dritschel, D. G.* On the late-time behaviour of a bounded, inviscid two-dimensional flow / D. G. Dritschel, W. Qi, J. Marston // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2015. — Т. 783. — С. 1–22.
92. *Qi, W.* Hyperviscosity and statistical equilibria of Euler turbulence on the torus and the sphere / W. Qi, J. Marston // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. — 2014. — Т. 2014, № 7. — P07020.
93. *Kraichnan, R. H.* Statistical dynamics of two-dimensional flow / R. H. Kraichnan // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1975. — Т. 67, № 1. — С. 155–175.

94. *Abramov, R. V.* Statistically relevant conserved quantities for truncated quasigeostrophic flow / R. V. Abramov, A. J. Majda // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 2003. — Т. 100, № 7. — С. 3841—3846.
95. *Dubinkina, S.* Statistical mechanics of Arakawa's discretizations / S. Dubinkina, J. Frank // Journal of Computational Physics. — 2007. — Т. 227, № 2. — С. 1286—1305.
96. *Venaille, A.* Violent relaxation in two-dimensional flows with varying interaction range / A. Venaille, T. Dauxois, S. Ruffo // Physical Review E. — 2015. — Т. 92, № 1. — С. 011001.
97. *Обухов, А. М.* Об интегральных инвариантах в системах гидродинамического типа / А. М. Обухов // Доклады Академии наук. Т. 184. — Российская академия наук. 1969. — С. 309—312.
98. *Дымников, В. П.* Устойчивость и предсказуемость крупномасштабных атмосферных процессов / В. П. Дымников // М.: ИВМ РАН. — 2007. — Т. 283.
99. *Salmon, R.* Lectures on geophysical fluid dynamics / R. Salmon. — Oxford University Press, 1998.
100. *Дымников, В.* Информационная энтропия и локальные показатели Ляпунова баротропной атмосферной циркуляции / В. Дымников, Е. Казанцев, В. Харин // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. — 1992. — Т. 28, № 6. — С. 563.
101. *Bouchet, F.* Invariant measures of the 2D Euler and Vlasov equations / F. Bouchet, M. Corvellec // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. — 2010. — Т. 2010, № 08. — P08021.
102. *Miller, J.* Statistical mechanics of Euler equations in two dimensions / J. Miller // Physical review letters. — 1990. — Т. 65, № 17. — С. 2137.
103. *Lisman, J.* Note on the generation of most probable frequency distributions / J. Lisman, M. v. Zuylen // Statistica Neerlandica. — 1972. — Т. 26, № 1. — С. 19—23.
104. *Kozlov, V.* Gibbs ensembles and nonequilibrium statistical mechanics / V. Kozlov // RKhD, Moscow. — 2008.

105. *Turkington, B.* Statistical equilibrium measures and coherent states in two-dimensional turbulence / B. Turkington // Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences. — 1999. — T. 52, № 7. — C. 781–809.
106. *Arakawa, A.* Design of the UCLA general circulation model / A. Arakawa. — 1972.
107. *Kjellsson, J.* The impact of horizontal resolution on energy transfers in global ocean models / J. Kjellsson, L. Zanna // Fluids. — 2017. — T. 2, № 3. — C. 45.
108. *Brown, D.* Accurate projection methods for the incompressible Navier–Stokes equations / D. Brown, R. Cortez, M. Minion. — 2001.
109. *Diansky, N.* Sigma model of global ocean circulation and its sensitivity to variations in wind stress / N. Diansky, A. Bagno, V. Zalesny // Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics. — 2002. — T. 38, № 4. — C. 477–494.
110. Fully conservative higher order finite difference schemes for incompressible flow / Y. Morinishi [и др.] // Journal of computational physics. — 1998. — T. 143, № 1. — C. 90–124.
111. Simulation of the present-day climate with the climate model INMCM5 / E. Volodin [и др.] // Climate dynamics. — 2017. — T. 49, № 11/12. — C. 3715–3734.
112. *Arakawa, A.* Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model / A. Arakawa, V. R. Lamb // General circulation models of the atmosphere. — 1977. — T. 17, Supplement C. — C. 173–265.
113. *Hortal, M.* The development and testing of a new two-time-level semi-Lagrangian scheme (SETTLS) in the ECMWF forecast model / M. Hortal // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society: A journal of the atmospheric sciences, applied meteorology and physical oceanography. — 2002. — T. 128, № 583. — C. 1671–1687.
114. *Tolstykh, M.* Global semi-Lagrangian numerical weather prediction model / M. Tolstykh // FOP, Obninsk, Moscow, Russia. — 2010. — C. 111.

115. *Williamson, D. L.* Two-dimensional semi-Lagrangian transport with shape-preserving interpolation / D. L. Williamson, P. J. Rasch // Monthly Weather Review. — 1989. — T. 117, № 1. — C. 102–129.
116. *Purser, R.* An efficient interpolation procedure for high-order three-dimensional semi-Lagrangian models / R. Purser, L. Leslie // Monthly Weather Review. — 1991. — T. 119, № 10. — C. 2492–2498.
117. *Shashkin, V.* 3D conservative cascade semi-Lagrangian transport scheme using reduced latitude–longitude grid (CCS-RG) / V. Shashkin, R. Fadeev, M. Tolstykh // Journal of Computational Physics. — 2016. — T. 305. — C. 700–721.
118. *McDonald, A.* Accuracy of multiply-upstream, semi-Lagrangian advective schemes / A. McDonald // Monthly Weather Review. — 1984. — T. 112, № 6. — C. 1267–1275.
119. *Nair, R. D.* Efficient conservative global transport schemes for climate and atmospheric chemistry models / R. D. Nair, J. S. Scroggs, F. H. Semazzi // Monthly weather review. — 2002. — T. 130, № 8. — C. 2059–2073.
120. *Xiu, D.* A semi-Lagrangian high-order method for Navier–Stokes equations / D. Xiu, G. E. Karniadakis // Journal of computational physics. — 2001. — T. 172, № 2. — C. 658–684.
121. *Verma, S.* An improved bounded semi-Lagrangian scheme for the turbulent transport of passive scalars / S. Verma, Y. Xuan, G. Blanquart // Journal of Computational Physics. — 2014. — T. 272. — C. 1–22.
122. Large eddy simulation of two-dimensional isotropic turbulence / S. Sukoriansky [и др.] // Journal of scientific computing. — 1996. — T. 11, № 1. — C. 13–45.
123. *Nadiga, B.* Alternating zonal jets and energy fluxes in barotropic wind-driven gyres / B. Nadiga, D. Straub // Ocean Modelling. — 2010. — T. 33, № 3/4. — C. 257–269.
124. *Kitsios, V.* Scaling laws for parameterisations of subgrid eddy–eddy interactions in simulations of oceanic circulations / V. Kitsios, J. S. Frederiksen, M. Zidikheri // Ocean Modelling. — 2013. — T. 68. — C. 88–105.

125. *Deardorff, J. W.* A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers / J. W. Deardorff // Journal of Fluid Mechanics. — 1970. — T. 41, № 2. — C. 453—480.
126. *Laval, J.-P.* Nonlocality of interaction of scales in the dynamics of 2D incompressible fluids / J.-P. Laval, B. Dubrulle, S. Nazarenko // Physical review letters. — 1999. — T. 83, № 20. — C. 4061.
127. *Lund, T.* On the use of discrete filters for large eddy simulation / T. Lund // Annual Research Briefs. — 1997. — C. 83—95.
128. *Von Storch, H.* Statistical analysis in climate research / H. Von Storch, F. W. Zwiers. — Cambridge university press, 2001.
129. *Alvelius, K.* Random forcing of three-dimensional homogeneous turbulence / K. Alvelius // Physics of Fluids. — 1999. — T. 11, № 7. — C. 1880—1889.
130. *Shutts, G.* A stochastic convective backscatter scheme for use in ensemble prediction systems / G. Shutts // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. — 2015. — T. 141, № 692. — C. 2602—2616.
131. *Kraichnan, R. H.* Eddy viscosity in two and three dimensions / R. H. Kraichnan // Journal of the atmospheric sciences. — 1976. — T. 33, № 8. — C. 1521—1536.
132. *Boffetta, G.* Evidence for the double cascade scenario in two-dimensional turbulence / G. Boffetta, S. Musacchio // Physical Review E. — 2010. — T. 82, № 1. — C. 016307.
133. *Galewsky, J.* An initial-value problem for testing numerical models of the global shallow-water equations / J. Galewsky, R. K. Scott, L. M. Polvani // Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography. — 2004. — T. 56, № 5. — C. 429—440.
134. *Griffies, S. M.* Biharmonic friction with a Smagorinsky-like viscosity for use in large-scale eddy-permitting ocean models / S. M. Griffies, R. W. Hallberg // Monthly Weather Review. — 2000. — T. 128, № 8. — C. 2935—2946.
135. *Nastrom, G.* A climatology of atmospheric wavenumber spectra of wind and temperature observed by commercial aircraft / G. Nastrom, K. S. Gage // Journal of the atmospheric sciences. — 1985. — T. 42, № 9. — C. 950—960.
136. *Arnold, L.* Stochastic differential equations / L. Arnold. — New York, 1974.

137. Modifications of gyre circulation by sub-mesoscale physics / M. Lévy [и др.] // Ocean Modelling. — 2010. — Т. 34, № 1/2. — С. 1–15.
138. *Eden, C.* Towards a mesoscale eddy closure / C. Eden, R. J. Greatbatch // Ocean Modelling. — 2008. — Т. 20, № 3. — С. 223–239.
139. *Carati, D.* On the representation of backscatter in dynamic localization models / D. Carati, S. Ghosal, P. Moin // Physics of Fluids. — 1995. — Т. 7, № 3. — С. 606–616.
140. *Schumann, U.* The countergradient heat flux in turbulent stratified flows / U. Schumann // Nuclear engineering and design. — 1987. — Т. 100, № 3. — С. 255–262.
141. *Dwivedi, S.* Energetically consistent scale-adaptive stochastic and deterministic energy backscatter schemes for an atmospheric model / S. Dwivedi, C. L. Franzke, F. Lunkeit // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. — 2019. — Т. 145, № 725. — С. 3376–3386.
142. *Thuburn, J.* Cascades, backscatter and conservation in numerical models of two-dimensional turbulence / J. Thuburn, J. Kent, N. Wood // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. — 2014. — Т. 140, № 679. — С. 626–638.
143. Energy budget-based backscatter in a shallow water model of a double gyre basin / M. Klöwer [и др.] // Ocean Modelling. — 2018. — Т. 132. — С. 1–11.
144. Toward an energetically consistent, resolution aware parameterization of ocean mesoscale eddies / M. F. Jansen [и др.] // Journal of Advances in Modeling Earth Systems. — 2019. — Т. 11, № 8. — С. 2844–2860.
145. *Cerutti, S.* Spectral and hyper eddy viscosity in high-Reynolds-number turbulence / S. Cerutti, C. Meneveau, O. M. Knio // Journal of Fluid Mechanics. — 2000. — Т. 421. — С. 307–338.
146. Geographical variability of the first baroclinic Rossby radius of deformation / D. B. Chelton [и др.] // Journal of Physical Oceanography. — 1998. — Т. 28, № 3. — С. 433–460.
147. Scales, growth rates, and spectral fluxes of baroclinic instability in the ocean / R. Tulloch [и др.] // Journal of Physical Oceanography. — 2011. — Т. 41, № 6. — С. 1057–1076.

148. *Schlösser, F.* Diagnosing the energy cascade in a model of the North Atlantic / F. Schlösser, C. Eden // Geophysical research letters. — 2007. — Т. 34, № 2.
149. Nonlinear cascades of surface oceanic geostrophic kinetic energy in the frequency domain / B. K. Arbic [и др.] // Journal of Physical Oceanography. — 2012. — Т. 42, № 9. — С. 1577—1600.
150. *Sasaki, H.* SSH wavenumber spectra in the North Pacific from a high-resolution realistic simulation / H. Sasaki, P. Klein // Journal of Physical Oceanography. — 2012. — Т. 42, № 7. — С. 1233—1241.
151. *Deusebio, E.* The route to dissipation in strongly stratified and rotating flows / E. Deusebio, A. Vallgren, E. Lindborg // Journal of Fluid Mechanics. — 2013. — Т. 720. — С. 66—103.
152. *Di Leoni, P. C.* Inferring flow parameters and turbulent configuration with physics-informed data assimilation and spectral nudging / P. C. Di Leoni, A. Mazzino, L. Biferale // Physical Review Fluids. — 2018. — Т. 3, № 10. — С. 104604.
153. *Di Leoni, P. C.* Synchronization to Big Data: Nudging the Navier-Stokes Equations for Data Assimilation of Turbulent Flows / P. C. Di Leoni, A. Mazzino, L. Biferale // Physical Review X. — 2020. — Т. 10, № 1. — С. 011023.
154. Turbulence- The filtering approach / M. Germano [и др.] // Journal of Fluid Mechanics. — 1992. — Т. 238, № 1. — С. 325—336.
155. *Fox, D. G.* Inviscid dynamics of two-dimensional turbulence / D. G. Fox, S. A. Orszag // The Physics of Fluids. — 1973. — Т. 16, № 2. — С. 169—171.
156. *Gama, S.* The two-dimensional Navier-Stokes-Kuramoto-Sivashinsky equation on the connection machine / S. Gama, U. Frisch // Computing Systems in Engineering. — 1995. — Т. 6, № 4/5. — С. 325—329.
157. *Gao, P.* Numerical Simulation of Stochastic Kuramoto-Sivashinsky Equation / P. Gao, C. Cai, X. Liu // Journal of Applied Mathematics and Physics. — 2018. — Т. 6, № 11. — С. 2363—2369.
158. *Kalogirou, A.* An in-depth numerical study of the two-dimensional Kuramoto-Sivashinsky equation / A. Kalogirou, E. E. Keaveny, D. T. Papageorgiou // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2015. — Т. 471, № 2179. — С. 20140932.