



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 532.5

MSC 2010: 35Q82, 35Q31, 76F65

**Равновесные состояния
конечномерных аппроксимаций
уравнений двумерной идеальной жидкости**

П. А. Пережогин, В. П. Дымников

Исследованы равновесные состояния аппроксимаций Аракавы для уравнений двумерной идеальной жидкости при высоком разрешении 8192^2 . Проведено сравнение равновесных состояний аппроксимаций Аракавы с квазиравновесными состояниями вязкой жидкости. Особое внимание уделено недавно обнаруженной ступенчатой форме крупных вихрей, а также наличию мелких вихрей в конечном состоянии. Показано, что равновесная динамика крупных масштабов в аппроксимациях Аракавы близка к теоретическим равновесным состояниям идеальной жидкости. Изучена возможность получения предельных конденсированных состояний путем осреднения по времени (сходимость по Чезаро), которая может решить проблему нестационарности конечных состояний.

Ключевые слова: идеальная жидкость, равновесные состояния, конечномерные аппроксимации, гамильтоновы системы

Получено 3 октября 2016 года

После доработки 23 ноября 2016 года

Работа выполнена в ИВМ РАН при поддержке РФФИ (сравнение вязких и невязких задач) проект 14-27-00126 и гранта Президента НШ-9836.2016.5.

Пережогин Павел Александрович

pperezhogin@gmail.com

Институт вычислительной математики РАН

119333, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

Московский физико-технический институт (государственный университет)

141700, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

Дымников Валентин Павлович

dymnikov@inm.ras.ru

Институт вычислительной математики РАН

119333, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

1. Введение

Исследование характеристик динамики двумерной жидкости является одной из центральных задач геофизической гидродинамики (атмосферные и океанические течения квазидвумерны). Такие исследования связаны как с чисто математическими проблемами (существованием и единственностью решений [3], существованием и устойчивостью аттракторов [15] и т. п.), так и с гидродинамическими (каскадами энергии и энтропии по спектру [20], существованием равновесных распределений энергии и предельных конденсированных состояний [33] и т. п.). Эти проблемы изучаются для трех постановок: чисто идеальная двумерная жидкость [40], задачи о разрушающейся турбулентности [12], когда вводится малая диссипация, и задачи вынужденной турбулентности [30], то есть система уравнений двумерной жидкости с форсингом и диссипацией. В настоящей работе мы будем исследовать две первые задачи. Нашей главной целью будет дать ответ на вопрос о существовании равновесных состояний для аппроксимаций Аракавы идеальной жидкости и преобразований, с помощью которых эти равновесные состояния будут в определенном смысле эквивалентны квазиравновесным состояниям разрушающейся двумерной турбулентности, а также равновесным состояниям идеальной жидкости. Мы выбрали для исследования именно аппроксимации Аракавы, поскольку уже исследовали их в задаче вынужденной турбулентности в работе [30].

Запишем уравнения идеальной двумерной несжимаемой жидкости в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = 0, \quad (1.1)$$

где ψ — функция тока, ω — завихренность, а $J(\psi, \omega) = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}$ — якобиан. Функция тока связана с завихренностью соотношением

$$\Delta \psi = \omega, \quad (1.2)$$

где Δ — оператор Лапласа. Область интегрирования — квадрат с периодическими граничными условиями $\Omega = [0, 2\pi)^2$. Для уравнений (1.1) глобальная теорема существования и единственности решения доказана в [3].

Уравнения (1.1) обладают законами сохранения импульса \mathbf{P} и энергии \mathcal{E}

$$\mathbf{P} = \left(\int_{\Omega} y\omega \, dx, - \int_{\Omega} x\omega \, dx \right), \quad (1.3)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \psi\omega \, dx, \quad (1.4)$$

а также имеют бесконечное число инвариантов (казимиров) вида

$$\int_{\Omega} \Phi(\omega) \, dx. \quad (1.5)$$

Инвариантность всех казимиров (1.5) эквивалентна сохранению распределения завихренности $\gamma(\omega)$ по площадям dS :

$$\frac{dS}{S} = \gamma(\omega) \, d\omega, \quad (1.6)$$



величина $S\gamma(\omega) d\omega$ равна площади, в которой располагается завихренность со значениями, лежащими в интервале $(\omega, \omega + d\omega)$. Вместо казимиров общего вида (1.5) обычно рассматривают моменты распределения $\gamma(\omega)$:

$$C_n = S \cdot \int \omega^n \gamma(\omega) d\omega. \quad (1.7)$$

Наиболее известными казимами являются завихренность C_1 и энтропия Z :

$$C_1 = \int_{\Omega} \omega dx, \quad (1.8)$$

$$Z = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \omega^2 dx = \frac{1}{2} C_2. \quad (1.9)$$

Одной из самых распространенных конечномерных аппроксимаций уравнения идеальной жидкости (1.1) являются галёркинские приближения:

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial t} + J(\psi_n, \omega_n)_n = 0, \quad (1.10)$$

где нижним индексом n обозначается проекция на подпространство первых n гармоник ряда Фурье. Галёркинские приближения нам понадобятся в теоретических целях. Теорема сходимости на периодическом квадрате для галёркинских приближений приведена в работе [23], а для аппроксимаций Аракавы — в работе [2].

Добавлением в правую часть уравнения (1.1) мелкомасштабной диссипации мы приходим к задаче о разрушающейся турбулентности:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = (-1)^{n+1} \nu_n \Delta^n \omega, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

Мелкомасштабная диссипация в разрушающейся турбулентности (1.11) практически не изменяет уровень энергии (энтропия при этом диссипируется значительно [36]) на характерных временах формирования крупномасштабных течений по причине того, что в двумерном случае каскад энергии направлен в сторону крупных масштабов [20]. Поэтому, в отличие от трехмерной турбулентности, где каскад энергии направлен в мелкие масштабы, в двумерном случае возможно образование квазиравновесных состояний [11]. Если задать произвольные начальные данные, то, согласно большинству численных расчетов, система приходит в квазиравновесное состояние, которое состоит из небольшого количества крупных вихрей. Например, на квадрате образуется один вихрь [34], на периодическом квадрате — два вихря [24, 31], а на сфере — четыре вихря [12, 31]. Крупные вихри образуются по причине передачи энергии в крупные масштабы. Энергия скапливается на самом крупном масштабе, который доступен в системе. Этот масштаб зависит от граничных условий и законов сохранения [31]. В некоторых случаях наблюдается вырождение самого крупного масштаба по энергии, что приводит к неединственности квазиравновесных состояний. Например, на периодическом квадрате крупным гармоникам отвечают базисные функции $\sin(x)$ и $\sin(y)$ (без учета фазы). Таким образом, возможны три типа квазиравновесных состояний: два вихря (равномерное распределение энергии между этими модами), джет (энергия содержится только в одной из мод) и промежуточное состояние. Крупные вихри обычно оказываются близки к стационарному решению и обладают приближенной зависимостью $\omega = F(\psi)$ [37].

Стационарные элементы решения называются когерентными структурами, и их важным свойством является наличие корреляции между фазами в фурье-пространстве [22].

Выше были описаны квазиравновесные состояния вязкой жидкости (1.11); однако построение статистических теорий для диссипативных систем представляет серьезную трудность, поэтому большинство теоретических результатов связано с уравнениями идеальной жидкости (1.1). Появление когерентных структур впервые было предсказано в модели точечных вихрей [18, 26, 29]. Согласно этой теории, должна существовать связь

$$\bar{\omega} = \alpha \sinh(\beta \bar{\psi}), \quad (1.12)$$

где чертой обозначено осреднение по пространству. Как будет видно ниже, осреднение действительно необходимо для фильтрации мелкомасштабных флуктуаций, которые с течением времени появляются в решениях уравнений идеальной жидкости (1.1). Позже зависимость общего вида $\bar{\omega} = F(\bar{\psi})$ была установлена в рамках теории среднего поля [25, 33].

Большинство работ по изучению равновесных состояний методом численного моделирования было проведено с использованием либо физической вязкости [41], либо фильтра высокого порядка [31], либо при наличии схемной диссипации [12]. Практически во всех случаях зависимость вида (1.12) качественно выполняется. Интерес к диссипативным моделям вызван прежде всего тем, что реальная жидкость обязательно обладает небольшой вязкостью. Вопрос об эквивалентности равновесных состояний идеальной жидкости и вязкой жидкости при $\nu_n \rightarrow 0$ до сих пор остается нерешенным, и, как указано в работе [41], возможность применять теорию среднего поля к задаче о разрушающейся турбулентности оказалась неожиданной для первых исследователей в этой области.

Изучению равновесных состояний конечномерных аппроксимаций в численных экспериментах уделено гораздо меньшее внимание. В первых работах на эту тему проверялся только вид равновесного спектра [8, 17]. Наличие функциональной зависимости $\bar{\omega} = F(\bar{\psi})$ впервые изучено в работах [4, 5, 14], в которых установлена линейная взаимосвязь между функцией тока и завихренностью $\bar{\omega} = \alpha \bar{\psi}$. Однако основное внимание в этих работах уделено случаю с наличием топографии, присутствие которой регуляризует задачу и позволяет легко установить соотношение $\bar{\omega} = F(\bar{\psi})$ с помощью спектральной теории [21]. В недавно вышедшей работе [40] на значительно более высоком разрешении впервые была получена нелинейная зависимость вида (1.12). В отличие от разрушающейся турбулентности, конечномерные аппроксимации (1.10) имеют свои причины обладать равновесными состояниями, схожими с идеальной жидкостью. Среди этих причин выделим наличие законов сохранения сеточных аналогов энергии и энтропии, а также теоремы сходимости.

Детальное сравнение в численном эксперименте можно провести только для двух задач: для вязкой жидкости и для конечномерной идеальной жидкости. Насколько известно авторам, до сих пор такого сравнения не было проведено. В настоящей работе мы продолжим исследование равновесных состояний конечномерных аппроксимаций и сопоставим их квазиравновесным состояниям разрушающейся турбулентности при высоком разрешении. Вопрос о приведении решений к эквивалентному виду будет рассмотрен с позиций осреднения по времени (сходимость по Чезаро) и по пространству. Будет приведено краткое изложение статистической теории для галёркинских приближений, а также поправки, необходимые для построения статистической теории аппроксимаций Аракавы. Мы уделим внимание новым особенностям решений, которые были обнаружены в работе [12]. Среди этих особенностей — ступенчатая форма крупных вихрей, а также наличие большого количества мелких вихрей в конечном состоянии.

2. Статистические модели двумерной турбулентности

Закономерности в поведении конечномерных аппроксимаций удобно искать, используя результаты статистических теорий. Мы будем рассматривать статистическую модель галёркинских приближений [20, 21] (спектральная теория Крайчнана) и теорию среднего поля [25, 33] (Miller Robert Sommeria theory, сокращенно MRS). На первый взгляд, два этих подхода никак не связаны, однако в последнее время была разработана техника выполнения предельных переходов от сеточных моделей к непрерывным моделям, которая получила название large deviation theory [16]. Далее мы кратко повторим основные выкладки работы [10], в которой осуществлен такой предельный переход.

2.1. Спектральная теория Крайчнана

Статистическая модель строится в фурье-пространстве. Для этого нам понадобится определить преобразование Фурье на квадрате $\Omega = [0, 2\pi)^2$:

$$\hat{\omega}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Omega} \omega(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad \omega(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\omega}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad (2.1)$$

где волновые векторы составлены из пар целых чисел $\mathbf{k} = (k_x, k_y) \in \mathbb{Z}^2$. В фурье-пространстве уравнения идеальной жидкости (1.1) имеют вид [38]

$$\frac{d\hat{\omega}_{\mathbf{k}}}{dt} = \sum_{\mathbf{q}+\mathbf{p}=\mathbf{k}} \mathbf{p} \times \mathbf{q} |\mathbf{q}|^{-2} \hat{\omega}_{\mathbf{p}} \hat{\omega}_{\mathbf{q}}. \quad (2.2)$$

Уравнение для конечномерной аппроксимации (1.10) в фурье-пространстве получается из уравнения (2.2) путем выбрасывания всех гармоник, чьи волновые векторы $\|\mathbf{k}\|_{\infty} > n$, $\|\mathbf{q}\|_{\infty} > n$, $\|\mathbf{p}\|_{\infty} > n$, где n — натуральное число. Далее для удобства сформируем из всех комплексных амплитуд $\hat{\omega}_{\mathbf{k}}$ вектор фазового пространства $\hat{\omega}_i$ длины N , в котором действительные и мнимые части $\hat{\omega}_{\mathbf{k}}$ записаны произвольным образом. Тогда уравнение (2.2) для конечномерной аппроксимации будет иметь простой вид

$$\frac{d\hat{\omega}_i}{dt} = \sum_{j,k=1}^N A_{ijk} \hat{\omega}_j \hat{\omega}_k = F_i(\hat{\omega}), \quad (2.3)$$

где конкретный вид коэффициентов A_{ijk} нам не понадобится. Для уравнения (2.3) верна теорема Лиувилля [10]:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i(\omega)}{\partial \hat{\omega}_i} = 0. \quad (2.4)$$

Конечномерная аппроксимация (2.3) обладает законами сохранения энергии (1.4) и энтропии (1.9). Запишем выражения для них в фурье-пространстве:

$$\mathcal{E}(\hat{\omega}) = 2\pi^2 \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\omega}_i^2}{k_i^2}, \quad \mathcal{Z}(\hat{\omega}) = 2\pi^2 \sum_{i=1}^N \hat{\omega}_i^2. \quad (2.5)$$

Наличие теоремы Лиувилля (2.4) позволяет ввести две инвариантные меры [10]. Микроканоническая мера для уравнения (2.3) имеет вид

$$\rho^M(\hat{\omega}) = \frac{1}{A} \delta(\mathcal{E}(\hat{\omega}) - E) \delta(\mathcal{Z}(\hat{\omega}) - Z), \quad (2.6)$$



а каноническая — вид

$$\rho^C(\hat{\omega}) = \frac{1}{B} \exp(-\alpha \mathcal{E}(\hat{\omega}) - \beta \mathcal{Z}(\hat{\omega})), \quad (2.7)$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака, A и B вводятся для нормировки. Для классических систем каноническая мера является хорошей аппроксимацией к микроканонической [19], однако для гидродинамических систем это не так, и в работе [39] показана неэквивалентность микроканонического и канонического ансамблей.

2.2. Переход к теории среднего поля MRS

Отсутствие корреляции между гармониками в канонической мере (2.7) не позволяет предсказывать с ее помощью появление когерентных структур. Крупные вихри могут быть получены только с использованием микроканонической меры, однако интегрировать микроканоническую меру неудобно, поэтому мы будем искать представление для предела микроканонической меры (2.6) в теории среднего поля,

$$\lim_{k_{\max} \rightarrow \infty} \rho^M(\hat{\omega}), \quad (2.8)$$

а затем изучим его свойства и будем полагать, что конечномерные аппроксимации обладают этими свойствами при устремлении разрешения к бесконечности ($k_{\max} \rightarrow \infty$).

Используя микроканоническую меру (2.6), можно найти корреляцию между завихренностью в двух различных точках. В работе [10] показано, что такая корреляция стремится к нулю при увеличении разрешения:

$$\langle \omega(\mathbf{x}_1) \omega(\mathbf{x}_2) \rangle \rightarrow 0, \quad k_{\max} \rightarrow \infty, \quad \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2, \quad (2.9)$$

где скобки означают осреднение по мере $\rho^M(\hat{\omega})$. Отсутствие корреляции между соседними точками в пределе позволяет рассматривать завихренность $\omega(\mathbf{x})$ как одну реализацию случайного поля, которое описывается одноточечным распределением $\rho(\mathbf{x}, \sigma)$. Величина $\rho(\mathbf{x}, \sigma) d\sigma$ равна вероятности найти в точке \mathbf{x} значение завихренности из интервала $(\sigma, \sigma + d\sigma)$. Условие нормировки выглядит следующим образом:

$$\mathcal{N}(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\mathbf{x}, \sigma) d\sigma = 1. \quad (2.10)$$

Каждая реализация $\omega(\mathbf{x})$ называется микросостоянием, а макросостояние представляет собой среднее поле завихренности:

$$\bar{\omega}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma \rho(\mathbf{x}, \sigma) d\sigma. \quad (2.11)$$

Выражения для энергии и энтропии имеют вид

$$\mathcal{E}(\rho) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{\psi} \bar{\omega} d\mathbf{x}, \quad \text{где } \Delta \bar{\psi} = \bar{\omega}, \quad (2.12)$$

$$\mathcal{Z}(\rho) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \sigma^2 \rho(\mathbf{x}, \sigma). \quad (2.13)$$

Приближение среднего поля состоит в упрощенном выражении для энергии (2.12). Отыскание равновесного состояния производится с применением понятия информационной энтропии:

$$\mathcal{S}(\rho) = - \int_{\Omega} dx \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \rho \ln \rho. \quad (2.14)$$

Равновесное распределение $\rho(\mathbf{x}, \sigma)$ реализует максимум энтропии при ограничениях на значения инвариантов:

$$\sup\{\mathcal{S}(\rho) \mid \mathcal{N}(\rho) = 1, \mathcal{E}(\rho) = E, \mathcal{Z}(\rho) = Z\}. \quad (2.15)$$

Согласно работе [10], реализующая максимум выражения (2.15) мера является представлением предела микроканонической меры (2.8) в рамках теории среднего поля.

Равновесные состояния идеальной жидкости (1.1) с учетом значений всех казимиров находятся путем решения несколько иной задачи максимизации, в которой вместо ограничения на энтропию возникает ограничение на распределение по площадям (теория MRS),

$$\sup\{\mathcal{S}(\rho) \mid \mathcal{N}(\rho) = 1, \mathcal{E}(\rho) = E, \gamma(\rho) = \gamma\}, \quad (2.16)$$

где распределение по площадям (1.6) выражается следующим образом:

$$\gamma(\rho) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, \sigma) dx. \quad (2.17)$$

2.3. Три режима турбулентности

Каноническая мера (2.7) была подробно рассмотрена в работе Крайчана [21]. Каноническая мера описывает статистические свойства галёркинских приближений (1.10). Ее удобство состоит в том, что она является нормальным распределением независимых случайных величин, а значит, легко можно получить распределение для одной моды [21]:

$$\rho(\hat{\omega}_i) \propto \exp(-2\pi^2 \hat{\omega}_i^2 (\alpha/k_i^2 + \beta)). \quad (2.18)$$

Найдем равновесное распределение энтропии по фурье-модам, проанализировав первый и второй моменты распределения (2.18):

$$\mathcal{Z}(\hat{\omega}_i) = 2\pi^2 \langle \hat{\omega}_i^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha/k_i^2 + \beta}, \quad (2.19)$$

где угловые скобки обозначают ансамблевое осреднение.

Определим вспомогательные волновые числа:

$$k_a^2 = \frac{1}{2} (k_{\max}^2 - 1) / \ln(k_{\max}), \quad k_b^2 = \frac{1}{2} (k_{\max}^2 + 1), \quad (2.20)$$

где k_{\max} обозначает максимальное волновое число для конечномерной аппроксимации. В работе [21] приведены три различных режима турбулентности в зависимости от среднего квадрата волнового числа $\mathcal{K}^2 = Z/E$:

$$(I) \quad 1 < \mathcal{K} < k_a, \quad \beta > 0, \quad -\beta < \alpha < 0, \quad (2.21)$$

$$(II) \quad k_a < \mathcal{K} < k_b, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad (2.22)$$

$$(III) \quad k_b < \mathcal{K} < k_{\max}, \quad \alpha > 0, \quad -\alpha < \beta k_{\max}^2 < 0. \quad (2.23)$$

Первый режим (I) соответствует конденсации энергии в крупных масштабах, третий (III) — конденсации энстрофии в мелких масштабах. Второй режим (II) является переходным. Отличительной особенностью первого режима (I) является то, что максимум спектрального распределения энергии приходится на самую крупномасштабную моду, что соответствует конденсации энергии в крупных масштабах. Разрушающаяся турбулентность при почти всех начальных условиях переходит в первый режим (I) турбулентности вследствие сильной диссипации энстрофии и незначительной диссипации энергии, что приводит к уменьшению числа \mathcal{K} . Динамика галёркинских приближений при фиксированном среднем волновом числе \mathcal{K} всегда переходит в первый режим (I) при увеличении разрешения, поскольку граница первого режима (I) сдвигается ($k_a \rightarrow \infty$ при $k_{\max} \rightarrow \infty$). Отсюда получаем, что, подобно вязкой жидкости, которая при сколь угодно мелкомасштабных начальных данных конденсирует энергию в крупных масштабах, галёркинские приближения обладают этим свойством при увеличении разрешения.

В первом режиме (I) турбулентности асимптотика равновесного спектра имеет простой вид в области высоких волновых чисел [21] и заключается в равномерном распределении энстрофии по модам:

$$\mathcal{Z}(\hat{\omega}_i) = \frac{1}{2\beta}, \quad k_i \rightarrow k_{\max}. \quad (2.24)$$

Асимптотика возникает по причине преобладания слагаемого β над α/k_i^2 в формуле (2.19). Вид равновесного спектра в области высоких волновых чисел (2.24) хорошо подтверждается в численных экспериментах с галёркинскими приближениями, однако в области низких волновых чисел наблюдаются расхождения с теорией [4]. По этой причине мы будем пользоваться только асимптотикой в области высоких волновых чисел (2.24).

2.4. Когерентные структуры

С этого момента мы будем говорить о предельных (при $k_{\max} \rightarrow \infty$) свойствах галёркинских приближений, если специально не оговорено другое. Спектральная теория Крайчана предсказывает конденсацию энергии в крупных масштабах в решениях галёркинских аппроксимаций при увеличении разрешения, однако эта теория не позволяет определить конкретный вид когерентных структур $\bar{\omega}(x)$. Для отыскания их формы следует применять теорию среднего поля. Ее удобство состоит в том, что равновесные состояния идеальной жидкости (2.16) и галёркинских приближений (2.15) могут быть представлены в одинаковой форме $\rho(\mathbf{x}, \sigma)$. Распределение завихренности $\rho(\mathbf{x}, \sigma)$ описывает две части решения: крупномасштабную (среднее поле $\bar{\omega}$) и мелкомасштабную (флуктуации около среднего поля). На конфигурацию течения при этом влияет только осредненная часть завихренности $\bar{\omega}$, которая определяет равновесный спектр энергии, а флуктуации около среднего поля не имеют конечного размера и определяют значения казимиров. Распределение для функции тока зависит только от осредненной завихренности $\bar{\omega}$ и выражается через дельта-функцию [10], то есть $\psi(\mathbf{x}) = \bar{\psi}(\mathbf{x})$. Получается, что каждое микросостояние $\omega(\mathbf{x})$ задает одно и то же течение $\bar{\psi}(\mathbf{x})$, которое определяется средним полем завихренности. Такое следствие из теории объясняется выражением для энергии (2.12), в котором представлены только осредненные поля.

Отыскание максимума функционала (2.15) описано во множестве работ, например [10, 31]. Мы приведем здесь лишь решение:

$$\rho(\mathbf{x}, \sigma) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp \left[-\alpha \left(\sigma - \frac{\beta \bar{\psi}}{2\alpha} \right)^2 \right], \quad (2.25)$$

где

$$\alpha = \frac{\pi^2}{Z - E}, \quad \frac{\beta}{2\alpha} = -1 \quad (2.26)$$

(на месте разности величин Z и E , которые имеют различную размерность, должно стоять выражение $Z - k_{\min}^2 E$, но в нашем случае $k_{\min} = 1$). Найдем из этого распределения среднее поле завихренности согласно определению (2.11):

$$\bar{\omega}(\mathbf{x}) = \frac{\beta}{2\alpha} \bar{\psi}(\mathbf{x}) = -\bar{\psi}(\mathbf{x}). \quad (2.27)$$

Равновесное распределение (2.25) задает асимптотическое при $k_{\max} \rightarrow \infty$ поведение решений галёркинских аппроксимаций. Поскольку равновесный спектр энергии определяется только осредненными полями, то зависимость (2.27) означает, что вся энергия конденсируется на самые крупные моды $\sin(x)$ и $\sin(y)$. В самом деле, решение уравнения $\Delta \bar{\psi}(\mathbf{x}) = \bar{\omega}(\mathbf{x}) = -\bar{\psi}(\mathbf{x})$ имеет простой вид:

$$\bar{\psi}(\mathbf{x}) = A \sin(x + \phi_1) + B \sin(y + \phi_2). \quad (2.28)$$

В отличие от вариационной задачи для галёркинских приближений (2.15), вариационная задача для идеальной жидкости (2.16) не имеет аналитических решений. В общем случае зависимость $\bar{\omega} = F(\bar{\psi})$ оказывается нелинейной, а конденсации всей энергии на самую крупную моду не происходит [10]. Согласно теории получаем, что когерентные структуры, возникающие в решениях идеальной жидкости и в решениях галёркинских приближений, должны значительно отличаться. В большинстве современных работ принято считать, что квазиравновесные состояния разрушающейся турбулентности схожи с равновесными состояниями идеальной жидкости [12, 26, 31].

2.5. Распределение по площадям

Рассмотрим вопрос о форме равновесного распределения по площадям (1.6), которая для идеальной жидкости является инвариантом, однако во всех численных экспериментах наблюдается сильное ее несохранение. Распределение по площадям при $k_{\max} \rightarrow \infty$ для галёркинских приближений можно найти по определению (2.17) и явному виду $\rho(\mathbf{x}, \sigma)$ (2.25):

$$\gamma(\omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Omega} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp \left[-\alpha \left(\omega - \frac{\beta \bar{\psi}(\mathbf{x})}{2\alpha} \right)^2 \right] d\mathbf{x}. \quad (2.29)$$

Интеграл нельзя вычислить аналитически, однако нам известны первый и второй моменты $\gamma(\omega)$ (1.7):

$$\int \omega \gamma(\omega) d\omega = 0, \quad \int \omega^2 \gamma(\omega) d\omega = \frac{2Z}{4\pi^2}. \quad (2.30)$$

Распределение $\gamma(\omega)$ зависит от соотношения двух составляющих решения: среднего поля $\bar{\omega}$ и мелкомасштабных гауссовых флуктуаций около него. Среднее поле содержит в себе долю энтропии, равную $E k_{\min}^2$, а в мелкие масштабы уходит $Z - E k_{\min}^2$ энтропии ($k_{\min} = 1$). Типичной для конечномерных аппроксимаций является ситуация, когда $Z/E \gg k_{\min}^2$. В этом случае мелкомасштабные флуктуации преобладают над средним полем в распределении $\gamma(\omega)$,

и оно может быть аппроксимировано гауссовым распределением с первым и вторым моментами, равными (2.30):

$$\gamma(\omega) = N\left(0, \frac{Z}{2\pi^2}\right). \quad (2.31)$$

К аналогичному результату можно прийти, воспользовавшись каноническим ансамблем (см. работу [4]).

В решениях вязких задач (1.11) преобладают когерентные структуры, определяемые средним полем $\bar{\omega}(\mathbf{x})$, а мелкомасштабные флуктуации отсутствуют. Таким образом, идеальная жидкость (1.1), вязкая жидкость (1.11) и галёркинские приближения (1.10) обладают различными распределениями по площадям $\gamma(\omega)$. В первом случае распределение сохраняется, во втором случае оно определяется формой когерентных структур, а в третьем случае — видом мелкомасштабных флуктуаций.

2.6. Преобразования, приводящие вязкие и невязкие решения к эквивалентному виду

Решения вязких и невязких задач обладают осредненной частью решения $\bar{\omega}(\mathbf{x})$. Невязкие решения, кроме того, имеют в своем составе мелкомасштабные флуктуации. Для того чтобы привести эти решения к эквивалентному виду, необходимо выделить среднее поле завихренности $\bar{\omega}(\mathbf{x})$ из решений конечномерных аппроксимаций путем введения преобразований, которые фильтруют мелкомасштабные флуктуации.

В работе [10] доказано, что мера (2.15) является инвариантной для уравнений идеальной жидкости (1.1). Если бы система была эргодической, то при поиске осредненного поля завихренности (2.11) среднее по ансамблю можно было бы заменить средним по времени:

$$\bar{\omega}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \omega(\mathbf{x}, t) dt. \quad (2.32)$$

Однако идеальная жидкость (1.1) не является эргодической системой, и это подтверждается тем фактом, что инвариантная мера не единственна [10]. Например, решение задачи (2.16) тоже является инвариантной мерой уравнений идеальной жидкости [10]. Заметным отклонением от теории является тот факт, что предельные (при $t \rightarrow \infty$) состояния в численных экспериментах часто оказываются нестационарными: крупные вихри дрейфуют [12, 31]. Это обстоятельство сильно затрудняет отыскание среднего поля $\bar{\omega}$ путем осреднения по времени (2.32). Обычную процедуру осреднения по времени можно дополнить процедурой исключения дрейфа вихря [11], но это скорее инженерный подход; нас же интересуют именно математические преобразования. Для галёркинских приближений при конечном разрешении существование предела (2.32) следует из теоремы Бирхгофа – Хинчина [19].

Другой подход к выделению когерентных структур может быть основан на законе больших чисел для меры $\rho(\mathbf{x}, \sigma)$ [10]:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\int_{V_a(\mathbf{x}_0)} \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{a^2} = \bar{\omega}(\mathbf{x}_0), \quad (2.33)$$

где $V_a(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty < a/2\}$ — квадратная окрестность точки \mathbf{x}_0 . Другими словами, после осреднения любого микросостояния $\omega(\mathbf{x})$ по достаточно малой окрестности точки \mathbf{x}_0

можно получить среднее поле завихренности $\bar{\omega}(\mathbf{x}_0)$ в этой точке с заданной точностью. Для галёркинских приближений это означает, что если зафиксировать размер квадрата a , то при устремлении разрешения к бесконечности можно получить среднее поле $\bar{\omega}(\mathbf{x})$ с пространственным разрешением, равным a .

2.7. Конечномерные аппроксимации Аракавы

Выше мы рассматривали только статистические модели галёркинских приближений (1.10), однако в данной работе численные эксперименты проведены с использованием аппроксимаций Аракавы [6]. Внесем необходимые поправки в канонический ансамбль и выясним, существенны ли они в пределе $k_{\max} \rightarrow \infty$. Для определения аппроксимаций нам потребуются три формы якобиана $J(\psi, \omega)$:

$$J_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}, \tag{2.34}$$

$$J_2 = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \omega \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \omega \right), \tag{2.35}$$

$$J_3 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \psi \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \psi \right). \tag{2.36}$$

Рассмотрим две дискретизации (индексом h обозначены центрально-разностные аппроксимации):

$$J_h = \frac{1}{2} (J_{1_h} + J_{3_h}), \text{ сохраняет энергию,} \tag{2.37}$$

$$J_h = \frac{1}{3} (J_{1_h} + J_{2_h} + J_{3_h}), \text{ сохраняет энергию и энтрофию.} \tag{2.38}$$

Выпишем конечно-разностные аналоги энергии и энтропии в сеточном и фурье-пространствах:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \psi_{ij} \omega_{ij} h^2, \quad \mathcal{E}(\hat{\omega}) = 2\pi^2 \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\omega}_i^2}{k_i'^2}, \tag{2.39}$$

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_{ij}^2 h^2, \quad \mathcal{Z}(\hat{\omega}) = 2\pi^2 \sum_{i=1}^N \hat{\omega}_i^2, \tag{2.40}$$

здесь h — шаг равномерной по пространству сетки с одинаковым числом узлов по каждому направлению, $k_i'^2 = 4[\sin^2(k_x h/2) + \sin^2(k_y h/2)]/h^2$ — модифицированное волновое число центрально-разностного оператора Лапласа. Отметим, что единственное отличие от галёркинских приближений состоит в выражении для энергии (2.39), а выражение для энтропии (2.40) полностью совпадает. На основе новых инвариантов можно построить канонический ансамбль. Ниже приведены только следствия из канонического ансамбля — равновесные спектры энтропии.

Равновесный спектр энтропии для схемы с одним инвариантом — энергией — имеет вид

$$\mathcal{Z}(\hat{\omega}_i) = 2\pi^2 \langle \hat{\omega}_i^2 \rangle = \frac{1}{2\alpha/k_i'^2}, \quad \mathcal{E}(\hat{\omega}_i) = \frac{\mathcal{Z}(\hat{\omega}_i)}{k_i'^2} = \frac{1}{2\alpha}. \tag{2.41}$$



Из формулы (2.41) видно, что имеет место равномерное распределение энергии по модам. В пределе $k_{\max} \rightarrow \infty$ это приведет к нулевому спектру энергии. Другими словами, в дискретизации (2.37) с одним инвариантом когерентных структур не возникает. Равномерное распределение энергии по модам наблюдается и в численных экспериментах, однако мы не будем здесь приводить их результаты по причине тривиальности полученных решений. Аналогичный результат был получен в работе [13].

Равновесный спектр энтропии для дискретизации с двумя инвариантами (2.38) имеет вид

$$\mathcal{Z}(\widehat{\omega}_i) = 2\pi^2 \langle \widehat{\omega}_i^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha/k_i'^2 + \beta}. \quad (2.42)$$

Модифицированное волновое число $k_i'^2$ на месте обычного k_i^2 — единственное отличие нового спектра (2.42) от спектра для галёркинских приближений (2.19). Модифицированное волновое число значительно отличается от обычного только в мелких масштабах, однако в этой области ограничение на энергию (слагаемое $\alpha/k_i'^2$) пренебрежимо мало по сравнению со слагаемым β . В самом деле, в первом режиме турбулентности (2.21) имеем неравенство

$$\frac{|\alpha|/k_{\max}'^2}{|\beta|} < 1/k_{\max}^2 \rightarrow 0, \text{ при } k_{\max} \rightarrow \infty. \quad (2.43)$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что равновесные состояния при $k_{\max} \rightarrow \infty$ для дискретизации Аракавы с двумя инвариантами (2.38) и галёркинских приближений (1.10) идентичны, поскольку модификация выражения для энергии (2.39) затрагивает только мелкие масштабы, где ограничение на энергию не играет существенной роли. В дальнейшем мы не будем различать статистические теории для двух этих дискретизаций.

3. Интегрирование по времени дискретизации с двумя инвариантами

В работе [7] показано, что дискретизация по пространству (2.38) точно сохраняет два квадратичных инварианта при использовании следующей дискретизации по времени:

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\tau} + J_h \left(\frac{\psi^{n+1} + \psi^n}{2}, \frac{\omega^{n+1} + \omega^n}{2} \right) = 0, \quad (3.1)$$

где n обозначает номер слоя по времени. Схема является неявной, а якобиан J_h — нелинейная функция от переменной ω^{n+1} . Для решения используем метод простых итераций (МПИ). Обозначим нижним индексом k номер итерации; тогда итерационный процесс выглядит следующим образом:

$$\omega_0 = \omega^n, \quad \psi_0 = \psi^n \quad (3.2)$$

$$\text{for } k = 1 : 10 \quad (3.3)$$

$$\frac{\omega_k - \omega^n}{\tau} + J_h \left(\frac{\psi_{k-1} + \psi^n}{2}, \frac{\omega_k + \omega^n}{2} \right) = 0, \quad (3.4)$$

$$\Delta_h \psi_k = \omega_k, \quad (3.5)$$

$$\text{end} \quad (3.6)$$

$$\omega^{n+1} = \omega_{10}, \quad \psi^{n+1} = \psi_{10} \quad (3.7)$$

Здесь Δ_h — центрально-разностная аппроксимация второго порядка для оператора Лапласа. Уравнение (3.4) относительно неизвестной ω_k решается одной итерацией метода сопряженных градиентов с начальным приближением ω_{k-1} , уравнение (3.5) — одной итерацией многосеточного метода с начальным приближением ψ_{k-1} . На массивно-параллельных системах основное время данного алгоритма уходит на решение уравнения Пуассона (3.5). Система линейных уравнений (3.4) решается не в исходном виде. Обозначим через A матрицу системы (3.4). Она может быть представлена в виде $A = I + K$, где I — единичная, а K — кососимметричная. Переход к новой матрице $A^T A = I - K^2$ позволяет использовать метод сопряженных градиентов, однако основная мотивация этого перехода состоит в уменьшении количества итераций в 2–3 раза, если сравнивать с решением исходной матрицы A методом бисопряженных градиентов.

Описанная схема на протяжении всего времени расчета сохраняет энергию и энтрофию с относительной точностью от 10^{-10} до 10^{-12} в зависимости от разрешения. Точность 10^{-12} достигается на максимальном разрешении 8192^2 . Для сравнения: в работе [5] относительная точность сохранения энергии составляла 10^{-6} , а в работе [40] относительная точность сохранения энергии и энтропии равна 10^{-4} . В обеих работах аналогичная нашей задача решалась спектральными методами. В работе [13] относительная точность составляла $3 \cdot 10^{-11}$ для дискретизации Аракавы, однако при значительно более низком разрешении 22^2 .

4. Численные эксперименты

Равновесные состояния могут сильно зависеть от начальных данных [35, 41]. Как правило, это свойство связывают с отсутствием эргодичности для уравнений идеальной жидкости. Для того чтобы избежать метастабильных состояний, следует брать начальные условия, у которых спектральная плотность распределена в широкой области волновых чисел (*broad band turbulence*, см. [12]). Например, в работах [12, 31] начальные условия сформированы из гармоник с волновыми числами в диапазоне от 4 до 10. Мы не будем изучать зависимость равновесных состояний от начальных условий, а наоборот, проследим, как меняются равновесные состояния при увеличении разрешения для одних и тех же начальных условий.

Большинство статистических теорий, такие как теория точечных вихрей [29], спектральная теория Крайчана (2.31), предполагают симметрию между отрицательной и положительной завихренностью. При проведении численных экспериментов обычно такая симметрия требуется от начальных данных [12, 31, 41]. Эта симметрия выражается в том, что все казимиры с нечетной степенью n (1.7) равны нулю. В качестве начальных данных для поля завихренности выбрана квадратная сетка из 16×16 ступенек с постоянными значениями v_i (см. рис. 1). Уровни завихренности принимают 256 различных значений в диапазоне от -1 до 1 : $v_i \in \{-1 + m/2, -1 + 3m/2, \dots, 1 - m/2\}$, где $m = 1/128$. Для всех экспериментов используется одно и то же случайное распределение значений по ступенькам. Такие начальные данные имеют относительно большой средний по энергии квадрат волнового числа $(\overline{k^2}^E)^{1/2} = \sqrt{Z/E} \approx 4.5$, спектральная плотность энтропии достаточно широко распределена по волновым числам, а все нечетные моменты равны нулю. При этом функция распределения по площадям принимает простой вид (если интервалы гистограммы выбраны достаточно грубыми):

$$\gamma(\omega) = 0.5. \quad (4.1)$$

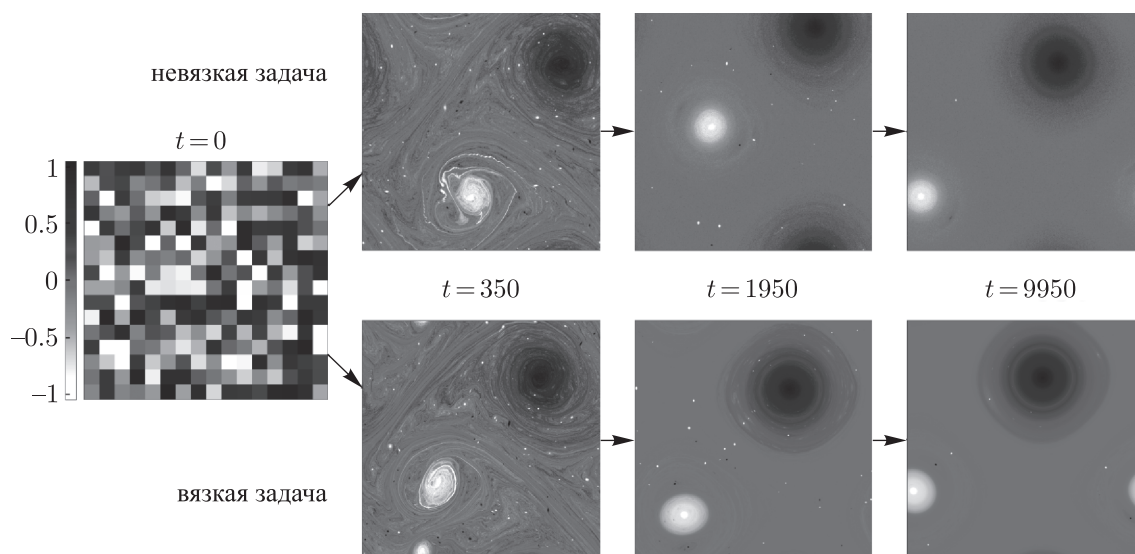


Рис. 1. Поле завихренности в различные моменты времени. Осредненная невязкая задача $8192^2 \rightarrow 512^2$ сверху, вязкая 8192^2 снизу. Значения, превышающие пределы цветовой полосы, подкрашиваются крайними цветами этой полосы.

Отметим, что, в отличие от экспериментов с разрушающейся турбулентностью, мы не можем брать слишком высоким соотношение Z/E , так как оно определяет количество мелкомасштабных флуктуаций в решении. Чем выше Z/E , тем большее разрешение необходимо выбирать для того, чтобы перейти в режим (I) турбулентности (2.21) и выделить когерентные структуры. Разрывные начальные данные не нарушают корректность постановки задачи, поскольку принадлежат пространству функций $L^\infty(\Omega)$, а для этого случая теорема разрешимости приведена в [23], теорема сходимости — в [32]. Такие начальные данные приводят к тому, что хотя значения казимиров не зависят от разрешения, значение энергии при повышении разрешения с 512^2 до 8192^2 уменьшается на 0.04%. Мы надеемся, что это обстоятельство не искажает результатов работы.

Все численные эксперименты проведены в двояко-периодическом канале: $\Omega = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$. Интегрирование по времени производится при $CFL = 0.35$, шаг по времени подбирается на каждом временном слое исходя из максимального значения скорости. Эксперименты проведены для вязкой (на рис. 1 внизу) и невязкой (вверху) задач с использованием дискретизации, описанной в предыдущей главе. Пространственное разрешение сетки принимает значения 512^2 , 1024^2 , 2048^2 , 8192^2 , а время расчета составляет $T = 10\,000$ при максимальной скорости $V_{\max} \approx 0.2$. Если определить характерное время изменчивости крупных масштабов (*large eddy turnover time*) как $T_{\text{eddy}} = L/V_{\max}$, то $T_{\text{eddy}} \approx 30$, а время расчета составляет $T \approx 315 \cdot T_{\text{eddy}}$. Достоверность результатов была проверена путем удвоения времени расчета на всех разрешениях, кроме максимального.

В качестве мелкомасштабного фильтра для вязкой задачи выбирается бигармонический оператор, и правая часть уравнения (1.11) принимает следующий вид:

$$-\nu \Delta^2 \omega. \quad (4.2)$$

Коэффициент бигармонической вязкости зависит от разрешения по закону $\nu \sim h^4$ (см. таблицу 1) и обеспечивает одинаковый на всех разрешениях коэффициент экспоненциального затухания для $2h$ волн, равный 0.08, где h — шаг по пространству. Несмотря на достаточно

Таблица 1. Значения бигармонической вязкости в вязкой задаче

Разрешение	512 ²	1024 ²	2048 ²	8192 ²
ν	$1.875 \cdot 10^{-11}$	$1.1719 \cdot 10^{-12}$	$7.3242 \cdot 10^{-14}$	$2.86 \cdot 10^{-16}$

низкий коэффициент вязкости, диссипация энтропии происходит интенсивно, и ее уровень падает до $\approx 8\%$ от начального в вязкой задаче к моменту $t = 1000$ (в течение этого времени в мелких масштабах присутствует значительное количество численного шума). Относительное падение уровня энергии мало и не превышает 10^{-5} на максимальном разрешении. Отметим, что мы исследуем квазиравновесные состояния вязкой жидкости в асимптотическом случае ($\nu \rightarrow +0$). Любая вязкая задача затухает до нуля, если только провести расчет на достаточно долгий интервал времени, однако оценка этого времени велика: $t = 1/\nu \approx 3 \cdot 10^{15}$ при максимальном разрешении.

Определим численный аналог процедуры осреднения по пространству (2.33), который будет использован для анализа результатов невязкой задачи. Осреднение производится с исходной сетки на более грубую по ближайшим ячейкам. Например, выражение $8192^2 \rightarrow 512^2$ означает, что для получения значения в каждой точке грубой сетки 512^2 мы производим осреднение по квадрату 16×16 исходной сетки 8192^2 .

4.1. Общие закономерности, наблюдаемые в вязких и невязких задачах

Завихренность в различные моменты времени при самом высоком разрешении 8192^2 для вязкой и невязкой задач показана на рисунке 1. Согласно рисунку, в обоих случаях происходит образование когерентных структур двух характерных размеров. Крупные вихри имеют размер расчетной области, а мелкие вихри соответствуют волновым числам от 50 до 70. Примерно к моменту времени $t = 2000$ заканчивается формирование крупных масштабов и завершается активная диссипация энтропии в вязкой задаче. Далее все изменения связаны в основном с динамикой средних масштабов, где расположены мелкие вихри. Среди мелких вихрей есть очень интенсивные амплитудой до 2.5 в вязких и невязких решениях (амплитуда начальных данных равна 1). Такие интенсивные вихри не могут образовываться в идеальной жидкости по причине сохранения распределения завихренности по площадям (1.6), а вместе с тем и экстремальных значений завихренности. Для конечномерных аппроксимаций рост экстремальных значений завихренности предсказывается теорией (2.31). Таким образом, большая интенсивность вихрей в вязкой задаче может быть связана с выбором недостаточно большой вязкости, а также с использованием разрывных начальных данных. Мелкие вихри являются долгоживущими и замедляют образование статистически равновесного состояния, медленно разрушаясь в течение всего времени расчета. Начиная с момента $t = 1950$ и до $t = 9950$ количество интенсивных (с амплитудой порядка 1) мелких вихрей уменьшается с 50 до 6 в вязкой задаче и с 27 до 1 в невязкой задаче. В последнем случае разрушению мелких вихрей способствуют мелкомасштабные флуктуации. Долгоживущие мелкие вихри были обнаружены только при разрешении 8192^2 точек. На меньших разрешениях они разрушаются до окончания формирования крупных масштабов. Пространственное разрешение проведенных численных экспериментов оказывается недостаточно высоким для того, чтобы дать однозначный ответ на поставленный в работе [28] вопрос о наличии мелких вихрей в предельных состояниях идеальной жидкости.

4.2. Особенности невязкой задачи

Рассмотрим эволюцию численных аналогов казимиров C_3 и C_4 (1.7), представленную на рисунке 2. До момента времени $t = 150$ уровень четных казимиров (C_4, C_6, \dots) резко возрастает, и это связано с мелкомасштабными процессами (масштаб рисунка не позволяет продемонстрировать этот процесс). Крупные масштабы сформировываются к моменту $t = 2000$, а затем происходит медленная подстройка системы, связанная с изменчивостью в средних масштабах. При относительно низких разрешениях 512^2 и 2048^2 процессы установления полного статистического равновесия заканчиваются к моментам времени $t = 4000$ и $t = 6000$ соответственно, однако при самом высоком разрешении 8192^2 установление не заканчивается даже к моменту окончания расчета $t = 10\,000$. Такое большое время установления может быть связано с наличием в решении большого количества мелких долгоживущих вихрей, время разрушения которых составляет тысячи единиц времени. Как показали эксперименты при низких разрешениях 512^2 и 2048^2 , удвоение времени расчета не приводит к качественным изменениям в системе (см. рис. 2), а потому крупномасштабную динамику при $t = 10\,000$ можно считать статистически равновесной. Отметим, что в вязкой задаче возникают аналогичные времена установления статистического равновесия.

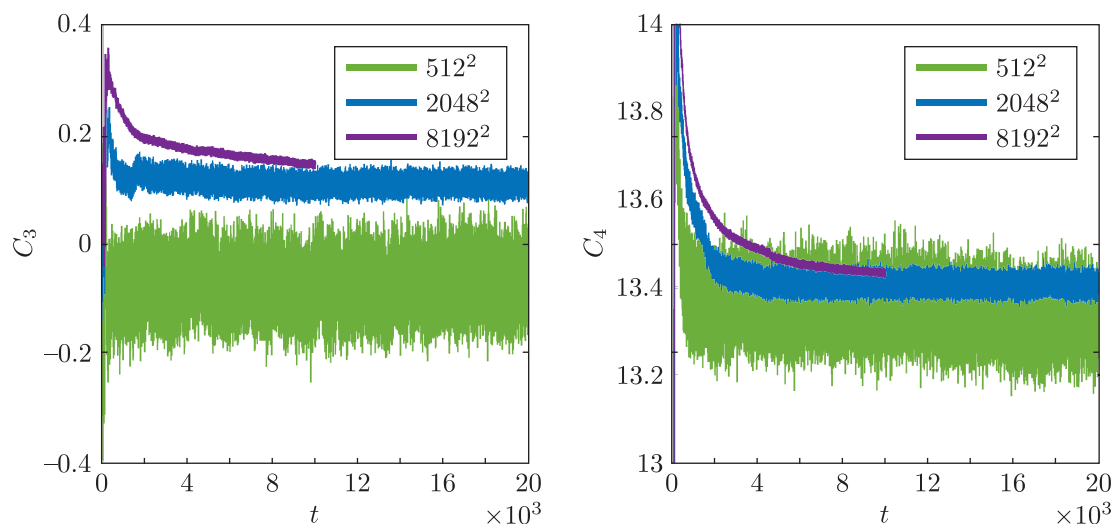


Рис. 2. Эволюция численных аналогов третьего C_3 и четвертого C_4 казимиров в невязкой задаче при различных разрешениях.^a

На рисунке 3а показано распределение энтропии по спектру волновых чисел в конечный момент времени для вязких и невязких задач. Мы приводим только один момент времени, потому что после наступления статистического равновесия принципиальных изменений не наблюдается. Согласно теории среднего поля, в решениях конечномерных аппроксимаций должна происходить конденсация всей энергии на самую крупную моду при увеличении разрешения (см. раздел 2.4). Однако в невязкой задаче этого не происходит, и при увеличении разрешения в 16 раз с 512^2 до 8192^2 статистически равновесный спектр в крупных масштабах практически не изменяется, а количество энергии в самой крупной моде оказывается одинаковым для всех представленных экспериментов (на рисунке показана энтропия, но все сказанное про энергию остается в силе, потому что $E(k) = Z(k)/k^2$).

^aДля читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1701005/>

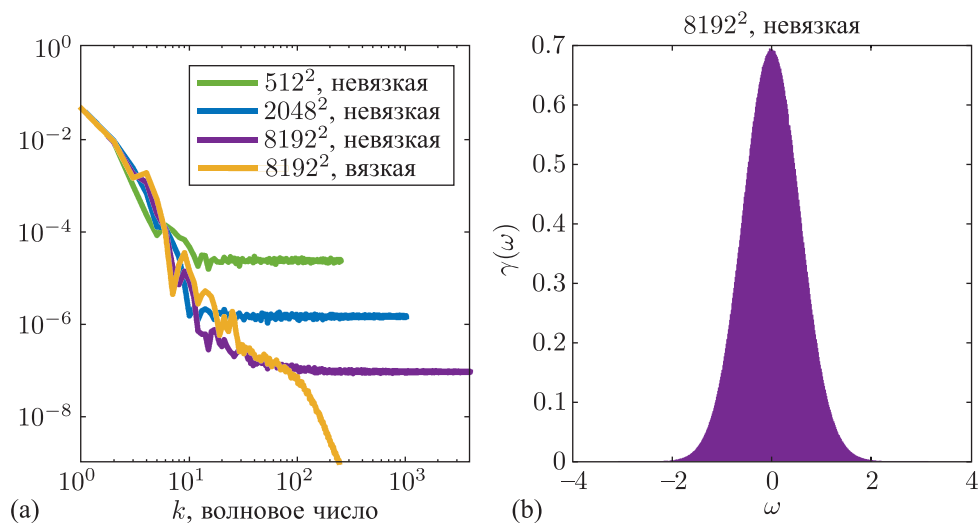


Рис. 3. Распределение энтропии по спектру волновых чисел (а), отнормированное на одну моду $(Z(k)/(2\pi k))$, где $Z = \int Z(k) dk$, и распределение по площадям $\gamma(\omega)$ для невязкой задачи 8192^2 (б) (512 интервалов гистограммы), $t = 10\,000$.

Мы полагаем, что дальнейшее увеличение разрешения не должно привести к серьезному изменению спектра в крупных масштабах. При максимальном разрешении 8192^2 серьезные отличия в спектральных характеристиках между вязкими и невязкими задачами начинаются примерно с волнового числа 60. В интервале волновых чисел от 60 и до 4096 в невязкой задаче энтропия равномерно распределена по фурье-модам. В этой части спектра располагаются мелкомасштабные флуктуации, которые хорошо описываются классической теорией Крайчана для галёркинских аппроксимаций (2.24).

Распределение по площадям (1.6) в конечный момент времени при самом высоком разрешении 8192^2 показано на рисунке 3б. Оно близко к гауссову, что, согласно теории среднего поля (2.31), означает, что в решении преобладают мелкомасштабные флуктуации. Отклонение от гауссовости найдем, измерив коэффициент эксцесса (*kurtosis*) $(4\pi^2 \cdot C_4/C_2^2)$ для распределения $\gamma(\omega)$ (коэффициент эксцесса нормального распределения равен 3). В нашем случае $4\pi^2 \cdot C_4/C_2^2 = 4\pi^2 \cdot 13.4358/13.1574^2 = 3.06$. Распределение по площадям практически не зависит от разрешения, а вместе с ним и средние по времени значения казимиров (см. рис. 2). Колебания уровня казимиров уменьшаются при увеличении разрешения по причине увеличения числа независимых мелкомасштабных мод (закон больших чисел).

Гауссово распределение по площадям для аппроксимаций Аракавы наблюдается в широких пределах разрешений от 22^2 в работе [13] до 8192^2 , а для галёркинских приближений от 11^2 в работе [4] до 1024^2 в работе [40]. Судя по всему, гауссов вид распределения является универсальным свойством этих двух конечномерных аппроксимаций, чем они сильно отличаются от идеальной жидкости, которая сохраняет распределение по площадям. Используя теоремы сходимости [2, 23], мы приходим к выводу, что время установления равновесия в идеальной жидкости может быть бесконечным. В самом деле, если бы время установления равновесия в идеальной жидкости было конечным, то, согласно теоремам сходимости, можно было бы подобрать такое разрешение, при котором распределение по площадям для идеальной жидкости и конечномерных аппроксимаций совпадало бы с заданной точностью в равновесном состоянии. Напомним, что разрывность начальных данных не мешает применению теорем сходимости (см. параграф 4).

4.3. Анализ когерентных структур, полученных с помощью осреднения по пространству

Для того чтобы выделить из невязкого решения когерентные структуры, отфильтруем мелкомасштабные флуктуации путем осреднения по пространству $8192^2 \rightarrow 128^2$. Осреднение отфильтровывает гармоники, находящиеся в области волновых чисел $k \in [64, 4096]$, где расположены мелкомасштабные флуктуации (см. рис. 3а). На рисунке 4а хорошо видна ступенчатая структура крупных вихрей, впервые полученная для вязкой жидкости в [12]. Форма когерентных структур сильно чувствительна к изменению разрешения сетки, шага по времени и параметра бигармонической вязкости. В самом деле, при переходе от достаточно подробного разрешения 2048^2 к разрешению 8192^2 ступенчатая структура в вязкой задаче поменялась. Когерентные структуры, возникающие в невязкой задаче, имеют сходство с когерентными структурами вязких решений (похожие крупные вихри отмечены стрелочками на рисунке 4а).

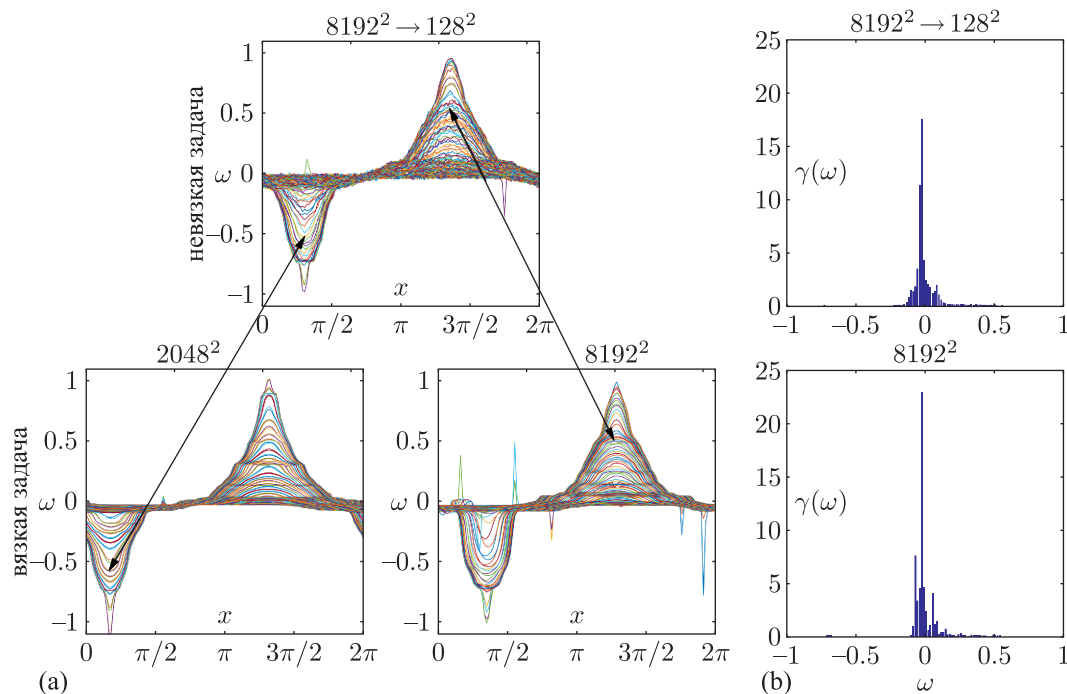


Рис. 4. Завихренность в 128 сечениях плоскостями $y = \text{const}$ (а) и распределение по площадям (б) (128 интервалов гистограммы), $t = 10\,000$. (Сверху осредненная по пространству невязкая задача, снизу — вязкая.)

На рисунке 4б показано распределение по площадям для вязкой и невязкой задач. Распределение для невязкой задачи сильно поменялось после применения осреднения (ср. с рис. 3б): диапазон значений завихренности уменьшился, а в самом распределении появились выбросы с большой интенсивностью. Наличие выбросов объясняется ступенчатой структурой вихрей (см. рис. 4а). В вязкой задаче по причине более явной ступенчатой структуры количество выбросов больше, а их интенсивность выше. Напомним, что в начальных данных распределение по площадям было равномерным (4.1).

На рисунке 5 приведена точечная диаграмма $\omega - \psi$ для вязких и невязких задач при различных разрешениях. В отличие от вязких задач, для невязких задач требуется пред-

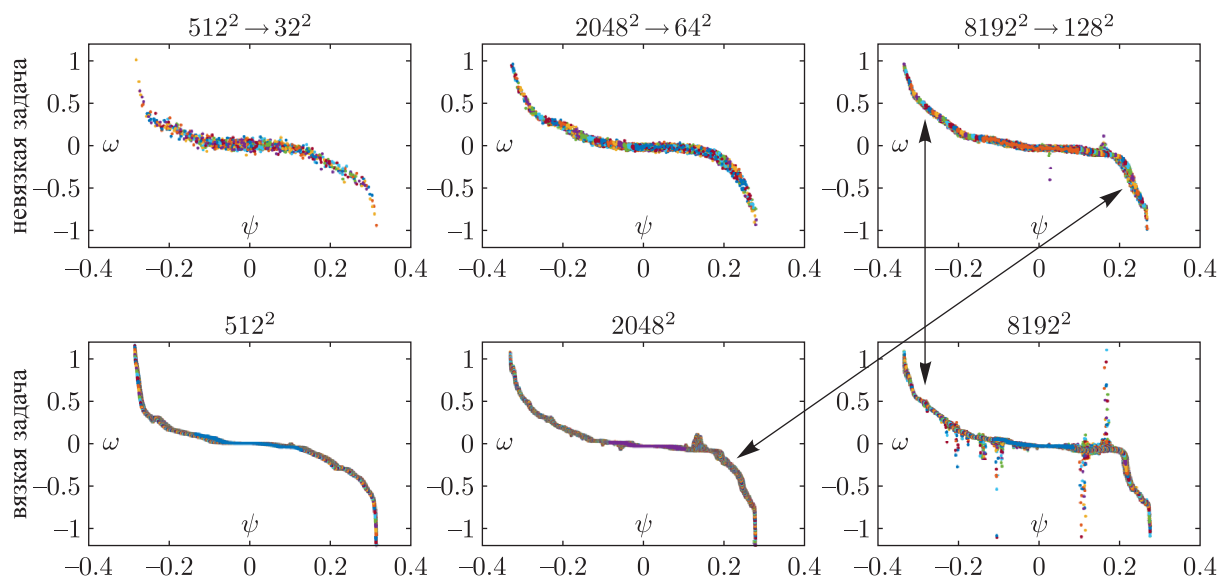


Рис. 5. Точечная диаграмма $\omega-\psi$ при различных разрешениях (сверху осредненные по пространству невязкие задачи, снизу — вязкие), $t = 10\,000$.

варительное осреднение по пространству. На самом низком разрешении диаграмма $\omega - \psi$ является практически симметричной и похожа на функцию $\sinh(\psi)$, как предсказывает теория точечных вихрей (1.12). При увеличении разрешения диаграмма $\omega - \psi$ постепенно усложняется (появляются резкие изгибы, которые определяются ступенчатой формой крупных вихрей, и выбросы, которые соответствуют мелким вихрям) и приобретает общие детали в вязких и невязких задачах (похожие ветви диаграммы отмечены стрелочками). Нелинейный вид зависимости $\bar{\omega} = F(\bar{\psi})$ для невязкой задачи не совпадает с предсказанием теории среднего поля (2.27). Нелинейная зависимость означает, что в решениях аппроксимаций Аракавы не происходит полной конденсации энергии на самую крупную моду (см. раздел 2.4). Разброс относительно функциональной зависимости $\bar{\omega} = F(\bar{\psi})$ в невязкой задаче постепенно уменьшается, и это означает, что когерентные структуры становятся все более стационарными. Произвольная монотонная зависимость $\bar{\omega} = F(\bar{\psi})$ является решением вариационной задачи MRS (2.16) с некоторым набором ограничений [9]. Отсюда получаем, что крупномасштабная динамика в невязкой задаче близка к теоретическим равновесным состояниям идеальной жидкости.

4.4. Исследование сходимости по Чезаро

Теория среднего поля для идеальной жидкости предсказывает возникновение равновесных состояний, характеризующихся наличием функциональной зависимости $\bar{\omega} = F(\bar{\psi})$, которая гарантирует их стационарность. В данном разделе мы рассмотрим вопрос о том, каким образом идеальная жидкость приходит в состояние равновесия. Наиболее простой вид сходимости имеет вид

$$\bar{\omega} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \overline{\omega(\mathbf{x}, t)}, \tag{4.3}$$

однако на практике наблюдается нестационарность предельных (при $t \rightarrow \infty$) состояний, которая приводит к нарушению этой сходимости: $\nexists \lim_{t \rightarrow +\infty} \overline{\omega(\mathbf{x}, t)}$. Вместо сходимости вида (4.3) можно рассмотреть сходимость по Чезаро (угловыми скобками будем обозначать

осреднение по времени):

$$\langle \omega \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \langle \omega \rangle_0^T = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \omega(\mathbf{x}, t) dt. \quad (4.4)$$

Существование такого предела для конечномерных систем следует из теоремы Бирхгофа–Хинчина [19]. Кроме того, если предположить эргодичность, то процесс осреднения будет сходиться к классическому равновесному состоянию: $\langle \omega \rangle_0^t \rightarrow \bar{\omega}$ при $t \rightarrow +\infty$ (см. (2.32)). Таким образом, процесс сходимости по Чезаро не только позволяет выделять из решения предельные конденсированные состояния, но, кроме того, определяет, в каком смысле следует понимать достижение идеальной жидкостью равновесного состояния. Если теперь отказаться от требования эргодичности, то возникает вопрос о виде предельных конденсированных состояний $\langle \omega \rangle$, которые мы будем изучать по виду зависимости $\langle \omega \rangle = G(\langle \psi \rangle)$, анализируя, как эта зависимость соотносится с классическим соотношением $\bar{\omega} = F(\bar{\psi})$. Подробное изучение проблемы сходимости по Чезаро функций распределения к равновесным для гамильтоновых систем проведено в [1].

Так же как и осреднение по пространству, осреднение по времени фильтрует мелкие масштабы, поэтому характерное время сходимости процесса осреднения (4.4) определяется временем формирования крупных масштабов. Кроме того, оно фильтрует и долгоживущие мелкие вихри, а значит, осреднение по времени может решить проблему нестационарности средних масштабов; однако сходимости по Чезаро не является самостоятельной задачей: ее физический смысл тесно связан с вопросом о нестационарности крупных масштабов, которые характеризуются дрейфом крупных вихрей, как отмечено в разделе 2.6. Сильная нестационарность предельных состояний подробно изучена в работе [12], где показано, что периодическое движение крупных вихрей сохраняется на протяжении очень больших промежутков времени и, по всей видимости, является неотъемлемой частью предельных состояний.

Наши численные эксперименты показали, что в вязких задачах параметры дрейфа когерентных структур определяются к моменту времени $t \approx 2000$, когда крупные масштабы сформированы. После этого момента вихри дрейфуют по круговой орбите с определенным диаметром, а центр орбиты остается практически неизменным. Движение не является вращением вихрей вокруг общего центра, а наоборот, является поступательным: вектор, проведенный из центра одного вихря в центр другого, не изменяется с течением времени. В работе [12] нестационарность предельных состояний на сфере была объяснена с помощью модели четырех точечных вихрей. На плоскости такой подход неприменим, поскольку в модели двух точечных вихрей с противоположной завихренностью возможно только прямолинейное движение [27]. В невязкой задаче ситуация несколько иная: на грубых разрешениях (512^2 , 1024^2) вихри дрейфуют по случайной траектории, а на высоких разрешениях (2048^2 , 8192^2) траектория каждого вихря близка к круговой, с добавлением небольшого количества шума. Источником хаоса в процессе дрейфа могут являться мелкомасштабные флуктуации, потому что только они являются нескоррелированными с крупными масштабами.

Далее мы будем полагать, что численный расчет был проведен на достаточный интервал времени и периодические движения вихрей отражают предельную динамику системы. В таблице 2 приведен диаметр орбиты для положительного вихря в различных экспериментах. Координаты вихря вычислялись как положение максимума завихренности после

Таблица 2. Диаметр орбиты крупного вихря с положительной завихренностью

Разрешение	Вязкая задача				Невязкая задача			
	512 ²	1024 ²	2048 ²	8192 ²	512 ²	1024 ²	2048 ²	8192 ²
Диаметр орбиты	5.67	2.67	1.30	0.79	хаос	хаос	2.5	1.55

проекции на пространство функций $\{e^{ix}, e^{-ix}, e^{iy}, e^{-iy}\}$. Описывать периодические процессы в разрушающейся турбулентности с помощью анализа первых фурье-компонент было предложено в работах [12, 31]. Из таблицы следует, что при увеличении разрешения диаметр орбиты монотонно убывает как для вязких, так и для невязких задач. К сожалению, этот результат не может претендовать на универсальность, поскольку в некоторых не описанных в статье численных экспериментах с вязкостью на относительно низком разрешении ($256^2, 512^2$) радиус дрейфа увеличивался при увеличении разрешения.

В численных экспериментах наблюдается сходимость поля завихренности по Чезаро (см. рис. 6), однако по причине того, что диаметр дрейфа одного порядка с диаметром ядра вихря, при осреднении по времени происходит фильтрация физически важных крупных масштабов. В результате осредненное поле завихренности содержит в себе нефизические когерентные структуры. Среди отличий от когерентных структур, полученных с помощью осреднения по пространству (см. рис. 5), отметим малый диапазон значений завихренности, отсутствие визуального сходства и, самое главное, немонотонный вид зависимости $G(\langle\psi\rangle)$, который ставит под сомнение существование таких когерентных структур в идеальной жидкости [9]. В работе [1] отмечена похожая ситуация для гамильтоновых систем, где в общем случае функция распределения сходится по Чезаро к некоторому пределу, отличному от распределения Гиббса, который является теоретическим равновесным состоянием.

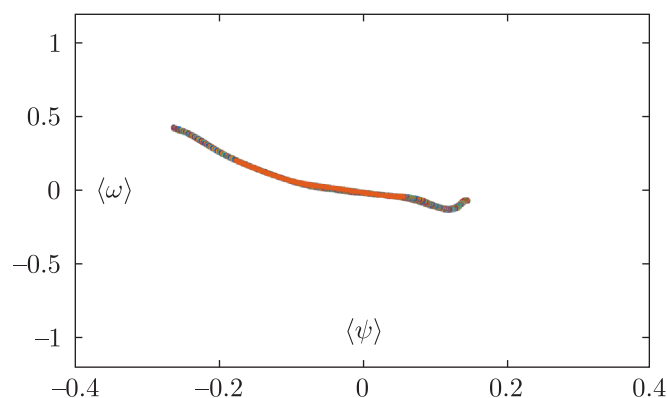


Рис. 6. Точечная диаграмма $\langle\omega\rangle-\langle\psi\rangle$ для невязкой задачи 8192^2 , осреднение по времени на интервале $t \in (0, 10\,000)$.

Разброс значений относительно зависимости $\langle\omega\rangle = G(\langle\psi\rangle)$ практически отсутствует на рисунке 6, и это свидетельствует о том, что осреднение по времени хорошо фильтрует мелкие масштабы. В том случае, когда вихрь не совершает крупных перемещений (при хаотическом дрейфе можно найти такие интервалы времени), осреднение по времени позволяет получать зависимость $\langle\omega\rangle = G(\langle\psi\rangle)$, аналогичную $\bar{\omega} = F(\bar{\psi})$. Мы полагаем, что в этом не должно быть никаких сомнений, а потому не приводим соответствующий рисунок.

5. Заключение

С теоретической и численной точек зрения исследованы аппроксимации Аракавы с двумя квадратичными инвариантами на предмет наличия и формы когерентных структур в предельном состоянии. Показано, что визуально, по виду зависимости $\bar{\omega} = F(\bar{\psi})$ и по распределению по площадям $\gamma(\bar{\omega})$ эти когерентные структуры во многом схожи со структурами, возникающими в вязкой жидкости. Когерентные структуры являются ступенчатыми и содержат в себе большое количество мелких вихрей, как и в вязкой жидкости [12]. Совпадение крупномасштабной динамики вязкой и невязкой жидкостей имеет важное практическое значение. Во-первых, это обстоятельство позволяет нам оправдывать применение теории идеальной жидкости к вязким задачам. Во-вторых, равновесная динамика конечномерной гамильтоновой системы с двумя квадратичными инвариантами может быть применима для описания равновесных состояний вязкой жидкости.

Методом ансамблей Гиббса показано, что в пределе бесконечного разрешения равновесные состояния галёркинских приближений и аппроксимаций Аракавы с двумя инвариантами идентичны. Вопреки теории среднего поля, в аппроксимациях Аракавы не происходит полной конденсации энергии при увеличении разрешения, более того, нет даже тенденции к конденсации при увеличении разрешения в 16 раз. Зависимость $\bar{\omega} = F(\bar{\psi})$ принимает сложную несимметричную форму, характерную для идеальной жидкости с некоторым набором ограничений, который определяется видом начальных данных. Аналогичный результат был получен в работе [40], однако о наличии мелких вихрей, ступенчатой структуры и несимметричной формы $F(\bar{\psi})$ не сообщалось. С помощью теоремы сходимости был сделан вывод о том, что установление равновесия в идеальной жидкости может происходить за бесконечное время. Тенденция к увеличению времени установления статистического равновесия в конечномерных аппроксимациях прослеживается при увеличении разрешения.

Теория среднего поля опирается на эргодическую гипотезу, которая не находит однозначного подтверждения для идеальной жидкости. Следствием отсутствия эргодичности является наличие нестационарности предельных состояний. По этой причине было предложено переформулировать основные выводы теории среднего поля, используя осреднение по времени (сходимость по Чезаро) вместо осреднения по пространству. Для аппроксимаций Аракавы процесс осреднения по времени сходится к конденсированному состоянию, которое лишено мелкомасштабных флуктуаций (как и при осреднении по пространству), однако крупные масштабы не имеют физического смысла из-за дрейфа когерентных структур. При увеличении разрешения диаметр орбиты дрейфа уменьшается, однако остается неясным, может ли диаметр орбиты уменьшаться до нуля и для всех ли начальных данных наблюдается его уменьшение. Сходимость по Чезаро была нами исследована как подход, с помощью которого можно решить проблему нестационарности предельных (при $t \rightarrow +\infty$) состояний, однако по результатам исследования мы получили, что необходимым условием успешного применения этого подхода является стационарность крупных масштабов. Таким образом, осреднение по времени может решить только проблему нестационарности средних масштабов (мелкие вихри).

6. Благодарности

Авторы благодарят д. ф.-м. н. А. В. Глазунова и к. ф.-м. н. Е. В. Мортикова за полезные замечания, а также руководство НИВЦ МГУ за предоставленную возможность проводить численные расчеты на суперкомпьютере «Ломоносов-1».



References

- [1] Kozlov V. V. *Gibbs ensembles and nonequilibrium statistical mechanics*, Izhevsk: R&C Dynamics, Institute of Computer Science, 2008 (Russian).
- [2] Baklanovskaya V. Investigation of the method of nets for two-dimensional equations of the Navier–Stokes type with non-negative viscosity: 2, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1984, vol. 24, no. 6, pp. 145–156; see also: *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1984, vol. 24, no. 12, pp. 1827–1841.
- [3] Yudovich V. Non-stationary flows of an ideal incompressible liquid, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1963, vol. 3, no. 6, pp. 1407–1456; see also: *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1963, vol. 3, no. 6, pp. 1032–1066.
- [4] Abramov R. V. Statistically relevant and irrelevant conserved quantities for the equilibrium statistical description of the truncated Burger–Hopf equation and the equations for barotropic flow: *PhD dissertation*, Troy, N.Y.: Rensselaer Polytechnic Inst., 2002.
- [5] Abramov R. V., Majda A. J. Statistically relevant conserved quantities for truncated quasigeostrophic flow, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 2003, vol. 100, no. 7, pp. 3841–3846.
- [6] Arakawa A. Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: 1. Two-dimensional incompressible flow, *J. Comput. Phys.*, 1966, vol. 1, no. 1, pp. 119–143.
- [7] Arakawa A. Design of the UCLA general circulation model, in *Numerical simulation of weather and climate: Technical report no. 7 (NASA-CR-131531)*, Los Angeles, Calif.: California Univ., 1972.
- [8] Basdevant C., Sadourny R. Ergodic properties of inviscid truncated models of two-dimensional incompressible flows, *J. Fluid Mech.*, 1975, vol. 69, no. 4, pp. 673–688.
- [9] Bouchet F. Simpler variational problems for statistical equilibria of the 2D Euler equation and other systems with long range interactions, *Phys. D*, 2008, vol. 237, nos. 14–17, pp. 1976–1981.
- [10] Bouchet F., Corvellec M. Invariant measures of the 2D Euler and Vlasov equations, *J. Stat. Mech.*, 2010, vol. 2010, no. 8, P08021, 40 pp.
- [11] Bouchet F., Venaille A. Statistical mechanics of two-dimensional and geophysical flows, *Phys. Rep.*, 2012, vol. 515, no. 5, pp. 227–295.
- [12] Dritschel D. G., Qi W., Marston J. On the late-time behaviour of a bounded, inviscid two-dimensional flow, *J. Fluid Mech.*, 2015, vol. 783, pp. 1–22.
- [13] Dubinkina S., Frank J. Statistical mechanics of Arakawa’s discretizations, *J. Comput. Phys.*, 2007, vol. 227, no. 2, pp. 1286–1305.
- [14] Dubinkina S., Frank J. Statistical relevance of vorticity conservation in the Hamiltonian particle-mesh method, *J. Comput. Phys.*, 2010, vol. 229, no. 7, pp. 2634–2648.
- [15] Dymnikov V., Gritsoun A. Climate model attractors: Chaos, quasi-regularity and sensitivity to small perturbations of external forcing, *Nonlinear Proc. Geophys.*, 2001, vol. 8, nos. 4–5, pp. 201–209.
- [16] Ellis R. S. The theory of large deviations: From Boltzmann’s 1877 calculation to equilibrium macrostates in 2D turbulence, *Phys. D*, 1999, vol. 133, no. 1, pp. 106–136.
- [17] Fox D. G., Orszag S. A. Inviscid dynamics of two-dimensional turbulence, *Phys. Fluids*, 1973, vol. 16, no. 2, pp. 169–171.
- [18] Joyce G., Montgomery D. Negative temperature states for the two-dimensional guiding-centre plasma, *J. Plasma Phys.*, 1973, vol. 10, no. 1, pp. 107–121.
- [19] Khinchin A. *Mathematical foundations of statistical mechanics*, New York: Dover, 1949.
- [20] Kraichnan R. H. Inertial ranges in two-dimensional turbulence, *Phys. Fluids*, 1967, vol. 10, no. 7, pp. 1417–1423.

- [21] Kraichnan R. H. Statistical dynamics of two-dimensional flow, *J. Fluid Mech.*, 1975, vol. 67, no. 1, pp. 155–175.
- [22] Kukharkin N. N. Coherent structure formation, phase correlations, and finite-size effects in 2D turbulence, *J. Sci. Comput.*, 1995, vol. 10, no. 4, pp. 409–448.
- [23] Marchioro C., Pulvirenti M. *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids*, Appl. Math. Sci., vol. 96, New York: Springer, 1994.
- [24] Brands H., Stulemeyer J., Pasmanter R. A., Schep T. J. A mean field prediction of the asymptotic state of decaying 2D turbulence, *Phys. Fluids*, 1997, vol. 9, no. 10, pp. 2815–2817.
- [25] Miller J. Statistical mechanics of Euler equations in two dimensions, *Phys. Rev. Lett.*, 1990, vol. 65, no. 17, pp. 2137–2140.
- [26] Montgomery D. C., Joyce G. Statistical mechanics of «negative temperature» states, *Phys. Fluids*, 1974, vol. 17, pp. 1139–1145.
- [27] Newton P. K. *The N-vortex problem: Analytical techniques*, Appl. Math. Sci., vol. 145, New York: Springer, 2001.
- [28] Newton P. K. The fate of random initial vorticity distributions for two-dimensional Euler equations on a sphere, *J. Fluid Mech.*, 2016, vol. 786, pp. 1–4.
- [29] Onsager L. Statistical hydrodynamics, *Nuovo Cimento (9)*, 1949, vol. 6, Supplemento, no. 2 (Convegno Internazionale di Meccanica Statistica), pp. 279–287.
- [30] Perezhogin P. A., Glazunov A. V., Mortikov E. V., Dymnikov V. P. Comparison of numerical advection schemes in two-dimensional turbulence simulation, *Rus. J. Num. Anal. Math. Model.*, 2017, vol. 32, no. 1 (in press).
- [31] Qi W., Marston J. B. Hyperviscosity and statistical equilibria of Euler turbulence on the torus and the sphere, *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, 2014, no. 7, P07020, 57 pp.
- [32] Robert R. On the statistical mechanics of 2D Euler equation, *Comm. Math. Phys.*, 2000, vol. 212, no. 1, pp. 245–256.
- [33] Robert R., Sommeria J. Statistical equilibrium states for two-dimensional flows, *J. Fluid Mech.*, 1991, vol. 229, pp. 291–310.
- [34] Schneider K., Farge M. Final states of decaying 2D turbulence in bounded domains: Influence of the geometry, *Phys. D*, 2008, vol. 237, no. 14, pp. 2228–2233.
- [35] Segre E., Kida S. Late states of incompressible 2D decaying vorticity fields, *Fluid Dynam. Res.*, 1998, vol. 23, no. 2, pp. 89–112.
- [36] Matthaeus W. H., Strubling W. T., Martinez D., Oughton S., Montgomery D. Selective decay and coherent vortices in two-dimensional incompressible turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, 1991, vol. 66, no. 21, pp. 2731–2734.
- [37] Tabeling P. Two-dimensional turbulence: A physicist approach, *Phys. Rep.*, 2002, vol. 362, no. 1, pp. 1–62.
- [38] Turkington B. Statistical equilibrium measures and coherent states in two-dimensional turbulence, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1999, vol. 52, no. 7, pp. 781–809.
- [39] Venaille A., Bouchet F. Statistical ensemble inequivalence and bicritical points for two-dimensional flows and geophysical flows, *Phys. Rev. Lett.*, 2009, vol. 102, no. 10, 104501, 4 pp.
- [40] Venaille A., Dauxois T., Ruffo S. Violent relaxation in two-dimensional flows with varying interaction range, *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 92, no. 1, 011001, 5 pp.
- [41] Yin Z., Montgomery D. C., Clercx H. J. H. Alternative statistical-mechanical descriptions of decaying two-dimensional turbulence in terms of «patches» and «points», *Phys. Fluids*, 2003, vol. 15, no. 7, pp. 1937–1953.

Equilibrium states of finite-dimensional approximations of a two-dimensional incompressible inviscid fluidPavel A. Perezhogin¹, Valentin P. Dymnikov²^{1,2}Institute of Numerical Mathematics RAS

ul. Gubkina 8, Moscow, 119333, Russia

¹Moscow Institute of Physics and Technology

Institutskiy per. 9, Dolgoprudny, Moscow, 141700, Russia

¹pperezhogin@gmail.com, ²dymnikov@inm.ras.ru

Equilibrium states of Arakawa approximations of a two-dimensional incompressible inviscid fluid are investigated in the case of high resolution 8192^2 . Comparison of these states with quasi-equilibrium states of a viscous fluid is made. Special attention is paid to the stepped shape of large coherent structures and to the presence of small vortices in final states. It is shown that the large-scale dynamics of Arakawa approximations are similar to the theoretical predictions for an ideal fluid. Cesaro convergence is investigated as an alternative technique to get condensed states. Additionally, it can be used to solve the problem of nonstationary final states.

MSC 2010: 35Q82, 35Q31, 76F65

Keywords: incompressible inviscid fluid, equilibrium states, finite-dimensional approximations, Hamiltonian system

Received October 3, 2016, accepted November 23, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 1, pp. 55–79 (Russian)